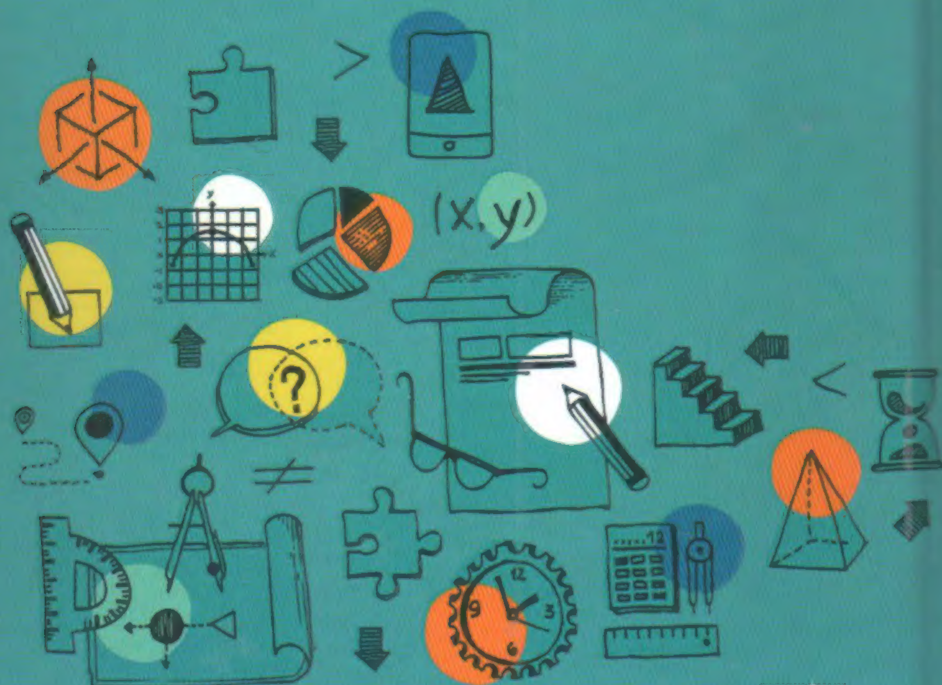
پۆل گلندینینگ

بیرکاری لە چەند خولەکێک

ڕوونکردنەوەی ٢٠٠ کلیلەوشە بە کورتی



وەرگێڕان و ئامادەکردنی:

ئوسامە تحسین پیربال



بیرکاری لە چەند خولەکێک

ڕوونکردنەوەی ٢٠٠ کلیلەوشە بە کورتی

بیرکاری لە چەند خولەکێک

روونکردنەوەی ٢٠٠ کلیلەوشە بە کورتی

پول گلندینینگ

وەرگێڕان و ئامادەکردنی:
ئوسامە تحسین پیرباڵ

پێناسی کتێب

- ناوی کتێب: بیرکاری لە چەند خولەکێك
- بابەت: لێکۆڵینەوەی زانستی
- نووسەر: پول گلندینینگ
- وەرگێڕان و ئامادەکردنی : ئوسامە تحسین پیربال
- دیزاین: ناوەندی ڕێنوێن
- ژمارەی چاپ: یەکەم
- تیراژ: ١٠٠٠
- نرخ: ٨٠٠٠ دینار

لە بەڕێوەبەرایەتیی گشتیی کتێبخانە گشتییەکان
ژمارە سپاردنی (١٨٤٤)ی ساڵی ٢٠١٩ی پێ دراوە.



ناوەندی ڕێنوێن


0751 140 8868 - 0750 126 9689


hakem1423@yahoo.com
renwen2009@yahoo.com


سلێمانی - بازاڕی ئاوباریك - نهۆمی یەکەم
بەرامبەر کاسۆمۆڵ - دوکانی ژمارە (٦٦)

پێشکەش بە (دایک) و (باوکم)،

بە تەواوی ئەندامانی خێزانەکەمان، کە بچوکترینیان

ناوی خاتوو (ڕوناس)ە.

سوپاس و پێزانین:

سوپاس بۆ هەردوو مامۆستای زۆر بەڕێز (شێرکۆ ڕەشید قادر) و (ڕێبین قادر محمد) کە من لەوانەوە فێری نووسین و نووسینی بیرکاری بووم. کە هەمیشە هاندەرم بوونە، ئەگەرچی تا هەنووکە کەسیانم ڕوو بە ڕوو نەبینیووە.

ڕێز و سوپاس بۆ ئەو مامۆستا و هاوڕێی خۆشەویستانەی دەورم کە هەمیشە پاڵپشت و یارمەتیدەرم بوونە بۆ هەر شتێک، ئەوانیش (م. ئەحمەد کەریم و م. کارزان کەریم) و هەردوو مامۆستای زمانی ئینگلیزی (م. عبدالباسیت حوسێن)، وەرگێڕ و نووسەری سەرکەتوو (م. ئەبوبەکر ئەحمەد خدر)

سوپاس تایبەتی هاوڕێی و مامۆستای زۆر خۆشەویست (م. ئەحمەد شێخانی) دەکەم کە ئەرکی هەڵەچنی ئەو پەرتوکەی گرتە ئەستۆ، ئەو هەوڵ و ماندووبونەی زۆر بەرزدەنرخێنم.

سوپاسی بێ سنوورم بۆ تەواوی مامۆستاکانی قوناغی خوێندنم، هەموو ئەوانەی ڕۆژێک لە ڕۆژان شتێکان فێرکردوومە و فێربوومە لێیان.

لە خۆمم پرسی بیرکاری چییە؟ لە وەڵامدا وتم : بە بیرکردنەوە و کارکردن تێدا، دەدرەوشێتەوە.

"علی مغدید عبدالله"[1]

[1](علی مغدید عبدالله) قوتابیم بوو لە پۆلی 10ی زانستی. لە وەڵامی پرسیارێک: بیرکاری چییە؟ یەکێک بوو لەو قوتابییانەی کە وەڵامەکەی بە لامەوە زۆر جوان بوو. بۆیە لە جیاتی ئەوەی وتەی بیرکاریزانێک دانێم، بە پێویستم زانی، کە وتەکەی ئەو بەسەر هەموو وتەیەک بخەم! لە بلۆگی "بیرکاری بۆ کورد" دەتوانن خوێنەری وتەی هەموو قوتابییەکانم بن.

ناوەڕۆک	لاپەڕە
پێشەکی وەرگێڕ- ئامادەکار	10
پێشەکی نووسەر	13
بەشی یەکەم	15
ژمارەکان	15
بەشی دووەم	59
کۆمەڵەکان	59
بەشی سێیەم	94
زنجیرە و یەکبەدوای یەک	95
بەشی چوارەم	127
ئەندازە	127
بەشی پێنجەم	185
جەبر	185
بەشی شەشەم	219
نەخشەکان و کالکیلەس	219
بەشی حەوتەم	271
پوختەی ئاراستەبڕەکان	271

بەشی هەشتەم.......... 299
جەبری پوخت- ڕووت.......... 299
بەشی نۆیەم.......... 325
ژمارە ئاڵۆزەکان-ئاوێتەکان.......... 325
بەشی دەیەم.......... 351
سازان.......... 351
بەشی یازدەهەم.......... 367
ئاهووتە و تۆپۆلۆجی.......... 367
بەشی دوانزەهەم.......... 413
ژیربێژی و سەلماندن.......... 413
بەشی سێزدەهەم.......... 435
تیۆری ژمارەکان.......... 435
ژێدەرەکان:.......... 462
دەربارەی وەرگێڕ و ئامادەکار:.......... 463

پێشەکی وەرگێڕ- ئامادەکار

بە نـاوی خـودای بەخشـندە و میهرەبـان. درود و سـەلام بـۆ سـەر گـیانی پـاکی پێشـەوامان- محمـد(ﷺ) ، نـوری دیـدە، هـێزی ڕۆح و چـرای ڕۆژی دواییمان.

نـزیکەی گەلاڕێزانـی 2014 بـوو نـاوم لە بەشـی بیرکـاری هـاتەوە. لە قۆنـاغی یەکەم، زۆر بە دوای پەرتوکێـک دەگەڕام بە زمـانی کـوردی سـەبارەت بە بیرکـاری، بـۆ ئەوەی تـۆزێ خـۆم بەهرەمەنـد بـکەم ، بەڵام بەداخەوە، هـیچ پەرتوکێـک بـوونی نەبـوو لە نێـو پەرتوکخـانەی کـوردی! لەو کـاتە، پرسـیارێکم بـۆ دروسـت بـوو؛ بـۆ پەرتوکخـانەی کـوردی لەم ڕووە زۆر هەژار و نەدارە؟ لە کاتێکـدا، کە هەمـوو نەتەوەیەک وا خەریـکە بە ئەوپەڕی ئـاواتی خـۆی دەگـات، کە لەم سـەدەیە، زانسـت و هـونەر، گەیشتۆتە پایەیەک، کە بە کارەبا و ئەتۆم ناوەستن!

وەرگێـران یـان نووسـینی پەرتوکێـک لەبـارەی بیرکـارییەوە، ئەگەر چـی زۆر سـانا و ئاسـانیش بێـت لە ڕووی نـاوەڕۆکەوە، بەڵام کـارێکی گـران و تـاقەت پـڕوکێنە، چـونکە ئامادەکـارییەکی پێشـوەختەی باشـی گەرەکە و، هیچـی لە بەهـرەیەک کەمتـر نیـیە، کە ئەم بەهـرەیەش، تـاقیکردنەوە و مەشـقی زۆری پێوسـتە، جیـا لەمەش، **تـا ئێسـتا لە زمـانی کوردیـدا، هـیچ کـارێکی وەهـا نەکـراوە لەسـەر زانسـتێکی ڕووخسـارەکی وەک "بیرکـاری"، نە وەک وەرگێـران، نە وەک نووسـین و دانـانی پەرتـوک بە زمـانی کـوردی؛ لە**

ئاستێکی تۆزێک باڵا. بۆیە منێک، کە هێشتا ساڵێک بەسەر بەدەستهێنانی بڕوانامەی بەکالۆریۆسەکەم تێپەڕنەبووە، ئەو هەنگاوە سەختەم ناوە و ئەسپی خۆمم تاوداوە! بۆیە، لە کاتی کردنە کوردی زاراوەکان و دەستەواژەکان، دووچاری گرفت دەبینەوە، کە هەندێ جار ناچاردەبین دەستەواژە و چەمکەکان وەک خۆی دابنێینەوە. لەگەڵ ئەمەش، لە هەڵبژاردنی واتایەکی گونجاو بۆ هەندێ چەمک، شتی نوێ بەرچاو دەکەوێت.

ئەم پەرتوکە، تەنیا پەرتوکێکی ئاسایی و وەرگێڕانێکی ئاسایی نییە، بەڵکو تێکەڵ بە ئەزموونی؛ خوێندنەوە و هەوڵدانی خۆم بووە لە مەڕ بیرکاری لەو چەند ساڵەی کە خوێندکار بوومە. بۆیە، وەرگێڕانی ئەم پەرتوکە؛ وەرگێڕانێکە بە "ئیلهامەوە"، چونکە تەنیا بیرۆکە گشتییەکەم لە هەر بابەتێک وەرگرتووە و دووبارە بەدید و شێوازی خۆم، سەر لە نوێ داڕشتنم بۆی کردووە، جا بە شتێک کەمتر یان زیاتر، وە لەگەڵ نووسینی پەراوێزەکان لە لایەن خۆمەوە. لەگەڵ ئەوەش، دوو بابەتم لە پەرتوکەکە لابردووە، دوو بابەتی ترم لە شوێنی داناوە، ئەمەش بەهۆکاری ئەوەی کە بەلامەوە گرنگترن. پەرتوکی "بیرکاری لە چەند خولەکێک" یەکێک بوو لەو پەرتوکانەی کە زۆر بە وردی خوێندمەوە و زۆر سەرنجی ڕاکێشام، پەرتوکێکە، کە ئەتوانم بڵێم؛ نزیکەی 70 لە سەدی مەعەریفەی بیرکاری لە خۆگرتووە، وەک نووسەریش خۆی باسی ئەکات. لەگەڵ ئەمەش، پەرتوکەکە جگە لەوەی ئاشنات دەکات بە هەندێ بابەت و چەمکی زۆر گرنگ، کێشە بیرکارییە شیکارنەکراوەکانیشت پێ دەناسێنێت (لە بەشی

سێزدەهەم) ئەو کێشە-پرسیارانەی کە تا هەنووکە شیکار نەکراون، وەک: گریمانەی ریمان، کێشەی ژمارە خۆبەشەکان... هتد.

لە کۆتایدا: هەموو هەوڵ و تەقەلا و دەستکەوتەکانی خۆم، هەموو ئەو بابەت و پەرتوکانەی خۆمم لێ بەهرەمەند کردووە، لەم چەند سەد کاغەزە خستوومەتە ڕوو؛ سەرەڕای ئەمەش، ئاستی سەرکەوتنیشم لەم کارە نازانم چەندێکە، هەموو ئەوەی کە دەیزانم ئەوەیە: هەستاوم بە هەوڵێک-ئەرکێکی خاکی. هیوا خوازم بەو هەوڵە، بتوانم فێنکییەک بخەمە نێو سینەی خوێنەر، هەروەها بەو ئاواتەی خوێنەری هێژا بە تام و چێژەوە خەریکی خوێندنەوەی ئەم پەرتوکە بێت.

هەموو کاتێک ئاگادارکردنەوەم لە هەڵەکان و کەم و کوڕییەکانم لە کەسانی شارەزا و پسپۆڕ، هەڵدەستین بە خزمەتێکی باشتر. خودای گەورە تەنیا خۆی سەرخەر و پاڵپشتە بۆ سەرکەوتن، هەر ئەویش مەبەست و نیازە.

ئوسامە تحسین پیربال

هەولێر، تەمووزی 2019

https://mathforkurd.wordpress.com

osamamathematics@gmail.com .

fb/osama.mathematic

پێشەکی نووسەر

بیرکـاری زەمەنێکـی زۆرە، نـزیکەی چـوار هەزار سـاڵە خەت و خـاڵی داوە. ئـێمە تـا ئێسـتاش، پێـوانی گۆشـەکان دەکەیـن بەهـۆی ژمـارەیەکەوە، ئەویـش "گۆشـەی پلەیـی" کە دەکـاتە 360، واتە یەک خـولی (Period) تەواوی بـازنەیەک. ئەم ڕژێـمە، لە لایەن بابلییەکـانەوە داهێنـدرا. ئەنـدازەش هەر لەگەڵ شارسـتانییەتی گریـک سـەرئاو کەوت، بەجۆرێـک تێگەیشـتنیان لە مەڕ "ژمـارە ڕێژەییەکـانیش" هەبـووە. شارسـتانییەتی عەرەب، گەشـەیان بە "جەبـردا"، لە پـاڵ ئەمەش، بیـرۆکەی "سـفر" یـان ئـاودا وەک ژمـارەیەک. بیرکـاری، مێژووەکـی دەوڵەمەنـدی هەیە بە هۆکـارێکی تـایبەت، ئەویـش ئەوەیە کە سـوودی لـێ وەردەگیرێـت لە زانسـتەکانی تـری وەک: فیزیـا، کیمیـا، تەکنەلۆجیـا، ئەنـدازیاری، تەلارسـازی و بازرگـانی... هتـد. لە ڕووکـاری ئەم پەرتـوکە دەردەکەوێـت؛ هەمـوو بیرکـاری دەکرێـت لە 200 پـارچە نووسـینی کـورت و پوخـت پێشـکەش بکرێـت؟! ئەم پەرتـوکە، هەوڵـێکە بـۆ تەفسـیری هەنـدێک لە دەسـتکەوتە کـۆن و هاوچەرخەکـانی جیهـانی بیرکـاری و ڕوونکـردنەوە لە هەمـبەر ئەو دەسـتکەوتانە؛ کە بـۆچی ئەوەنـدە گرنـگ و

جێی بایەخن. بۆ ئەوەی هەندێک بیرۆکە و چەمک بە پێی پێویست بە وردەکارییەکانییەوە بخرێنە ڕوو، ئەوە پێویست دەکات کە ڕۆبچینە چەقی بابەتەکە. لەگەڵ ئەمەش، هەر بابەتێک باسی گرنگی و بەکاربەرییەکەی کراوە، بەڵام بەبێ وردەکارییەکەی. بیرۆکە بیرکارییەکان هەمووی پشت بە یەکتر دەبەستن و پێکەوە زنجیرەیەک دروست دەکەن، بۆیەش بابەتەکانی ئەم پەرتوکە، بەجۆرێک دانراوە، کە خزمایەتی و پەیوەندی لە نێوانیاندا هەیە. بەڵام دەرگا کراوەیە بۆ ئەوەی بە دوای پەیوەندی زیاتر بگەڕێن. یەکێک لە تایبەتمەندییە سەرسامکەرەکانی بیرکاری ئەوەیە، کە ئەو پانتاییە فراوانەی کە وا دەردەکەوێت سەربەخۆ و لێکجیابن، ئەوە لە ڕاستیدا پەیوەندی لە نێوانیاندا هەیە و بە قوڵی پێکبەستراونەتەوە. تیۆری بەرق (Moonshine theory)، کە نمونەیەکی زیندوی هاوچەرخە بۆ ئەمە، یان "هاوکێشە ڕیزکراوەکان" پەیوەندی بە شتگەڵێکەوە هەیە.

ئەم پەرتوکەش، بریتییە لە بژاردنێکی ورد، لە دەستکەوتی چوار هەزار ساڵەی مرۆڤایەتی، بەڵام مومکینە ئەمە تەنیا دەسپێک و سەرەتایەک بێت. هیواخوازم کە ئەم پەرتوکە، پایەکی زیاتر دەستەبەر بکات بۆ خوێندنەوەی زیاتر و بیرکردنەوەیەکی قوڵتر.

پول گلندینینگ،

گەلاریزانی 2011

بەشی یەکەم

ژمارەکان

Numbers



پوختەی ژمارەکان

Introducing Numbers

"ژمارەکـان" لە بنچینـەدا، ئاوەڵنـاوێکن بـۆ وسـفی "چەنـدێتی" شـتەکانی دەوروبەرمـان، ڕەنـگە بڵـێن: سـێ دانە کورسـی یـان دوو مەڕ... کە تێـدا وەسـفی مەڕ و کورسـییەکانمان کـردووە لە ڕووی چەنـدایەتی نەک لە ڕووی چـۆنییەتی (شـێوە و پێکهـاتە)، بەڵام لە هەمـوو بارێـک نـاتوانین بـۆ وتنـی هەنـدێ شـت بەکاریـان بێنـین، یـاخود بەکارهێنـانی هەنـدێک لە ژمارەکـان، لە ژیـانی ڕۆژانە، بـۆ وەسـفی چەنـدێتی شـتەکان شـیاو نـین، وەک: بـزن و نیوێـک! ئەمەیـان ناشـێت بـۆ وەسـفکردنی چەنـدێتی هەنـدێک لەو شـتانە، چـونکە هـیچ مانـایەکی تەواو نـادات بەدەسـتەوە. ئەمەش واتـای ئەوەیە کە ژمارەکـان لە بەکارهێنـان دا، نـاوەڕۆک و مانـای جیـاوازی هەیە[2]، تـایبەت-لایەق بەشـتێکی دیـاریکراو نیـیە. لە شارسـتانییەتە کۆنەکـان، ژمارەکـان بەکـارهێنراون بە چەنـدین ڕێگـای جیـاواز، بـۆ ئەم مەبەسـتەش، هێمایـان بـۆ هەنـدێک لەو ژمـارانە دانـاوە، وەک لای میسـرییە کۆنەکـان، بە زمـانی "هیلـۆگرافی" شـلێری نـاوی (Water lily) هێمـایەک بـووە بـۆ ژمـارە هەزار (1000). کە هەر بەم شـێوەیەش لە کردارەکـان بەکاریـان هێنـاوە، بەڵام زۆر سـەخت و چەتـوون بـووە. بە تێـپەر بـوونی کـات و زیـاتر

---

[2] ژمارەکـان لە راسـتیدا پێکهـاتەیەکی (Form) بەتـاڵن! بـۆ نمـونە (1) چـی دەگەیەنێـت؟ ئەو ژمـارەیە (1) دەشـێت تۆپێـک، سـێوێک، یـان هەرشـتێکی تـر بێـت، بـۆیە شـتێک نییە لەم گێتییە بە ناوی: 3 یان 7 !

بەکارهێنانی ژمارەکان لە بوارەکانی ژیان، هێماکان بۆ نواندنی ژمارەکان سادە و ئاسان بوونەوە، لەگەڵ ئەم سادەکردنەوەیەش، هێشتا مامەڵەکردن لەگەڵ هەندێ جۆری ژمارە، زۆر ئاڵۆز و دژوارە. لە دوای ئەم سەردەمە کۆنەی میسرییەکان، سیستەمێکی مۆدێرنی نوێ پەیدا بوو، ئەویش "ڕژێمی ژماری دەیی" (Base of 10) کە ئەم ڕژێمە-سیستەمە لە شارستانییەتی عەرەبەوە بۆ جیهان پەلی هاویشت، تا دواجار گشت شارستانییەتەکانی تری گرتەوە. ڕژێمی ژمارەی دەیی، سەرجەم هەژمارکردنە زۆر ئاڵۆزەکانی زولاڵ و ئاسانکردەوە لە بەکارهێنان و نووسیندا، بەجۆرێک، ژمارەکان لە شێوەیەکی سەخت ڕزگاریان بوو، کە ئەمەش بووە هۆی لێکۆڵینەوەی زیاتر لە هەمبەر ژمارەکان؛ بۆ دۆزینەوەی تایبەتمەندییەکانیان و پۆلێنکردنیان. هەر لەگەڵ ئەم پێشکەوتنە، دەرگای چەندین پرسیار بە ڕووماندا کرایەوە، کە تا هەنووکەش شیکارییان نییە، بە واتایەکی تر، تا ئێستا یەکلانەکراونەتەوە[3].



میسرییەکان، بەو هێمایانە گوزارشتیان لە ژمارەکان دەکرد و بەرکاریان دەهێنا.

[3] لە بیرکاریدا، یەکلاکردنەوەی پرسیک-کێشەیەک، گرینگترە لە خودی ئەوەی کە پرسەکە بەکام ئاراستە (سەلماندن یان پوچەڵکردنەوە) دەبردرێت. گرنگ یەکلاکردنەوەیە، جا بە هەر ئاراستەیەک بێت.

ژمارە سروشتییەکان

Natural numbers

ژمــــارە سروشـــتییەکان، ئەو ژمـــارە ســـادە و ســـاکارانەن، کە بـــۆ ژمــاردنی شـــتە ئاســـاییەکان-بەرچاوەکـــانی ژیـــانی ڕۆژانە بەکاریـــان دێنـــین ... 1,2,3 . کـــارامەیی و بەکارهێنـــانی ئەم ژمـــارانە، بە شـــێوەیەکی ڕاســـتەوخۆ پەیوەنـــدی بە بازرگـــانی، کـــڕین و فرۆشـــتن، زەوی و زار ... هەبـــووە. هەرچەنـــدە کـــرداری ژمـــاردن پێویســـتر بـــووە لە ژمارەکـــان، بـــۆ ئەم مەبەســـتەش، خـــودی ژمارەکـــان کردارەکـــانی: کـــۆکردنەوە و لێـــدەرکردن دەگـــرنە خۆیـــان بەشـــێوەیەکی ســـەرەکی. هەر بە زوویـــی ژمـــاردن زانـــراوە و کردارەکـــان لە دەڤەری ژمارەکـــان بـــوونەتە بەشـــێک لە زاراوە بیرکارییەکـــان، کە بە تەفســـیرێکەوە چـــوونە نێـــو ئەم پانتـــاییە، بـــوونەتە شـــتانێک، کە دەتـــوانن گۆڕانکـــاری و کـــار لە یەکتـــر بـــکەن. لە "کـــۆکردنەوە" (Addition) بە ســـانایی حـــاڵی دەبـــین کە شـــتێک دەخەیـــنە ســـەر شـــتێکی تـــر، بە زمـــانی بیرکـــاری: $2 = 1 + 1$. (کـــرداری "کـــۆکردنەوە" وەک هەوێنـــی کـــرداری "جـــارانکردن") چـــونکە کـــرداری کـــۆکردنەوە بـــوو کـــرداری جـــارانکردنی (Multiplication) بەدوای خۆیـــدا هێنـــا، کە ئەویـــش بەهـــۆی وردبـــوونەوە لە کـــۆی دوو شـــتی یەکســـان، وەک: $3 + 3$ یـــان $5 + 5$. دەپرســـین: چەنـــد شـــتمان هەیە لە 5 کـــۆمەڵە، کە هەر کـــۆمەڵەیەک 6 شـــت لەخۆدەگرێـــت؟ دیـــارە کە دەکـــاتە ژمـــارەی کۆمەڵەکـــان جـــارانی (×) شـــتەکانی نـــاو یەک کـــۆمەڵە، کە بە زمـــانی بیرکـــاری: $6 \times 5 = 30$. لە دوای ئەم هەنگـــاوە،

کـــرداری دابەش (Division) بەر ژێـــری مـــرۆڤ کەوت، واتە کـــرداری "جـــارانکردن" هەوێنـــی درکـــردن بـــوو بە کـــرداری "دابەش"، روونە کە ئەم دوانە (جـــاران و دابەش) پـــێچەوانەی یەکتـــرن (Inverse). ئەگەر 30 شـــت دابەش بکەیـــنە ســـەر 5 کـــۆمەڵەی یەکســـان، هەر کـــۆمەڵەیەک چەنـــد شـــتی بەردەکەوێـــت؟ بەڵام لێـــرە دووچـــاری گرفتێـــک بـــووینەوە، ئەویـــش ئەوەیە: چـــی ڕوودەدات ئەگەر 31 دابەش بکەیـــنە ســـەر 5 کـــۆمەڵە؟ یـــان چـــی ڕوودەدات ئەگەر 10 لە 1 دەربـــــکەین[4] (?= 10 − 1)؟ بـــۆ وەڵامـــی ئەو پرســـیارانە، پێوســـتمان بە ئەو دیـــوی ژمـــارە سروشـــتییەکان هەیە، کە دواتـــر ئاشـــنایان دەبین.



[4] پرســیارێکی لەم شــێوە، بــووە هــۆی ئەوەی کە مرۆڤــایەتی بیــر لە ژمــارەی "ـنایەکی-نەرێنی" (Negative numbers) بکاتەوە.

یەک

One

سەرەڕای هەبوونی ژمارە کش-سفریش، بەلام ژمارە یەک بە دلی زانستی ژمارە دادەنرێت. ژمارە یەک، ئاوەڵناوێکە بۆ تاکە شتێک یان یەک شت. تایبەتمەندی ئەو ژمارەیە، لەوەدایە کە بە کۆکردنەوەی لەگەڵ خۆی یان بە لێدەکردنی لەگەڵ خۆی، هەموو ژمارە ئەرێنیەکان (Positive) و نەرێنیەکان (Negative) بەرهەم دێنیت! کە ئەمەش بنەمای ژماردنەکان بوو، کە لەوانەشە سەرەتاکەی بگەڕێتەوە بۆ چەند سەد ساڵێک بەر لە زاین. گرنگی ئەم ژمارەیە هەر ئەوەیە نییە کە ژمارەکانی تری لێ بەرهەم دێت، بەڵکو لە کرداری "جاران" بەو ژمارە دەوترێت: دانەی بێ لایەن لە کرداری جارانکردن (Multiplication identity). ئەم ژمارەیە دواتر دەبێتە چەقی تیۆرییەک بە ناوی: تیۆری گرووپ. لەگەڵ ئەوەش، ژمارە یەک تایبەتمەندییەکی ناوازەتری هەیە، ئەویش دەبێتە بەشداربووی (Factor) هەموو ژمارەیەک، واتا هەموو ژمارەیەک دەتواندرێت لەسەر لێکدانی "خۆی و یەک" بنووسرێت، وەک: ($7 = 1 \times 7$) . ژمارە یەک لەدوای سفر، یەکەم ژمارەی تاکە (Odd). لە هەندێ بواری زانست[5]، ئەم ژمارەیە

---

[5] لە تیۆری ئەگەرەکان، ئەگەری ڕوودانی هەر ڕووداوێک دەکەوێتە نێوان 0 و 1. بۆ نموونە: ئەگەر مۆرە-بەردە زارێک هەڵدەین، ئەوە ئەگەری ئەو ژمارەی بۆمان دەردەچێت دەکاتە: 1/6 ، کە دیاریشە ئەو ژمارەیە لە نێوان سفر و یەک دایە.

گرنگییەکــی زۆر هەیە، بەجۆرێــک، هەنــدێک تیــۆری و ئەنجــامی بەدەســت هــاتوو لەو تیۆریــانە، لە نێــوان "ســفر و یەک" دایە، کە ئەنجــامەکەش چەنــدە لە یەک نزیکتر بێت، ئەوەندە باشتر و مایەی دڵخۆشییە.

لەگەڵ ئەمەش، ژمــارە یەک دەبێــتە خەت و خــاڵی ژمــارە خۆبەشــەکان (Prime numbers) کە دواتر باسییان دەکەین.



سفر (کش)

Zero

سـفر، بیرۆکەیەکـی ئـاڵۆز و تەلیسـماوییە. بە درێژایـی مێـژوو، ئەم ژمـارەیە جێگـای سـەرنج و مشـت و مـڕی زۆرێـک لە بیرمەنـدان-فەیلەسـوفان و بیرکاریزانـان بـووە، تەنـانەت ناولێنانیشـی، کـارێکی هەر وا ئاسـان نەبـووە. سـفر: ونتـرین شـت بـوو بە بەراورد لەگەڵ ژمارەکـانی تـر. مێـژووی ناولێنـانی سـفر و بەکارهێنـانی، لە دوای دۆزیـنەوە و بەکارهێنـانی ژمـارە سروشـتییەکانەوە بـووە. ئەگەر شارسـتانییەتی بابلییەکـان بە نمـونە وەرگـرین، ئەوان هـیچ شـتێکیان نەبـوو تـاکو گوزارشـت لە "سـفر" بـکەن، بـۆیە گەر لە نێـوان ژمارەکـان کاریـان بگەیشـتبا بە سـفر، ئەو شـوێنەیان بە بۆشایی (Empty) بەجێ دەهێشت، بەڵام لە کۆتایی ژمارەدا نا.

کـۆنترین پێناسـە بـۆ سـفر، دەگەڕێـتەوە بـۆ بیرکـاریزانە هینـدییەکان لە دەوروبەری سـەدەی نـۆیەم، تەنـانەت نـوکتەیەکیش لەو بـارەیەوە دراوەتە پاڵیـان کە؛ هینـدییەکان لە قرچۆکییـان[6] سـفریان داهێنـا، تـا بڵـێن: هـیچ پارەمـان پـێ نیـیە و موفلیسـین. بەڵام لە پانتـایی فەلسـەفەوە، هەمیشـە ئەم ژمـارەیە جێگـای سـەرنج بـووە، چـونکە وەک ژمارەکـانی تـر ڕەفتـار ناکـات! بـۆ نمـونە: دابەشـکردنی ژمـارەیەک بەسـەر سـفر، شـتێکی بـێ واتـا و نـاقولایە[7] ($\frac{3}{0}$)

---

[6] قرچۆک: ڕەزیل، چاوچنۆک، بەرچاوتەنگ.
[7] نا پەسـەندە، ڕێگە پێنەدراوە.

واتـا پێناسـە نەکـراوە (Undefined)! یـان لێکـدانی هەر ژمـارەیەک لە سـفر، ئەنجـامەکەی هەر دەکـاتەوە سـفر! بە هەمـان شـێوە، سـفر تایبەتمەنـدییەکی جیـاوازتری هەیە، ئەویـش کـۆی هەر ژمـارەیەکی بکەیـن، دەکـاتەوە ژمـارەکە خـۆی! کە ئەم تایبەتمەنـدییەش لە بیرکـاری پێـی دەوتـرێ: دانـــەی بـێ لایـــەن لە کـــرداری کۆکردنەوە (Addition identity).



ناکۆتا

Infinity

ناکۆتا[8]، بە دەربڕینی بیرکارییانە بە (∞) هێما دەکرێت. ناکۆتا واتە شتێک کە کۆتایی نایەت و کۆتاییەکی نییە، یان هیچ سنورێکی نییە. کارکردن لەگەڵ بیرکاری، بەبێ ڕووبەڕووبونەوەی ناکۆتا، ئەستەمە و تەنانەت قوتابیانی قۆناغی ئامادەیی ئاشنایەتی لەگەڵ ئەم شتە سەیرە پەیدا دەکەن. زۆرێک لە بەڵگە (Argument) بیرکارییەکان و تەکنیکەکان، تێوەدەگلێن لە هەڵبژاردنی شتێک لە خشتەیەکی (List) ناکۆتا، وەیان چی ڕوو دەدات ئەگەر هەندێ دۆخ-پرۆسە لە ناکۆتا نزیک بکرێتەوە؟ بەردەوام بوون بەرە و سنوری بێ سنوری؟! کۆمەڵەی (Set) ناکۆتای ژمارەکان (واتە بێ سنور لە ژمارەمان هەیە) یان کۆمەڵەیەکی ناکۆتا لە شت، پێیان دەوترێت: کۆمەڵە ناکۆتاکان (Infinite sets)، کە ئەمانەش بەشێکن لە کلیلی بیرکاری.

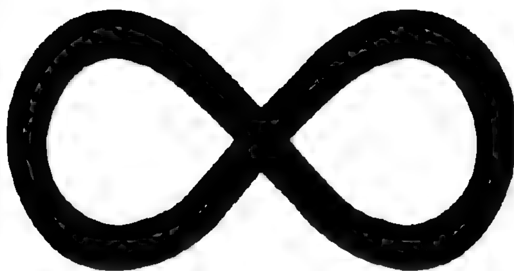
تەفسیری بیرکاریانە بۆ ئەو جۆرە کۆمەڵانە، دەمانبات بەرە و ئەنجامێکی زۆر جوان، ئەویش: پتر لە یەک جۆری ناکۆتامان هەیە، ئەمەش واتا زۆر جۆری ناکۆتا هەن، کە ناکۆتا هەیە لە ناکۆتایەکی

---

[8] نمونە وەک: ژماردنی ژمارە سروشتییەکان: ... ,1,2,3 هەتا بڕۆی، ژمارە هەر هەیە و کۆتایی نایەت، هەر بەم لۆژیکە، شتێکمان نییە بە ناوی'گەورەترین ژمارە' چونکە گریمان ئەگەر n گەورەترین ژمارە بێت، ئەوە n+1 لەو گەورەترە. ((لە سەرەتای پۆلی شەشی ئامادەیی، وام دەزانی 'ناکۆتا' ژمارەیە، بەڵام مامۆستای بیرکاریم (م. هۆشمەند زیاد) پێی وتین: لە هیچ هەنگاوێکی جەبری ناتوانین هێمای 'ناکۆتا' دابنێینەوە، چونکە ژمارە نییە))

تـر جیـاوازە. لە ڕاسـتیدا بـێ شـمار جـۆری ناکۆتـا هەیە، گەورە و گەورتـرە. ئـێمەش لە هەنـدێکیان حـاڵی دەبـین بە هـۆی زارشـتی[9] بیرکـارییەوە، کە دواتـر ئەو کـۆمەڵە ناکۆتـانە پـۆلێن دەکەیـن بەسـەر دوو بەرە-دەسـتە. بیـرۆکەی "ناکۆتـا" هەر تـایبەت نیـیە بە بیرکـاری، بـۆیە بە شـێوەیەکی گشـتی سـێ جـۆر لە ناکۆتـا هەیە، ئەوانـیش: ناکۆتـا لە بیرکـاری، ناکۆتـا لە فیزیـا، ناکۆتـا لە هـزری-دیـدی ئـاینی، بەڵام ئەوەی ئـێمە زۆر گرنگـی پـێ دەدەیـن، ناکۆتایە لە بیرکاری و فیزیا، کە ئەمانەش بەڕاستی زۆر چەتوونن.[10]

$$1+2+3+4+\cdots=\infty$$



[9] زارشت: لۆجیک.

[10] بلۆگی "بیرکاری بۆ کورد"

ڕژێمی ژمارەکان

Number system

ڕژێمی (سیستەم) ژمارەکان، ڕێگەیەکە بۆ نووسینی ژمارەکان، دەبڕینیان و تێگەیشتن لێیان. لێکۆڵینەوە لەوەی کە خاڵی هاوبەشی نێوان ئەم ژمارانە چییە؟ لە ژیانی ڕۆژانەماندا، لەگەڵ ڕژێمی ژمارەکان: ڕژێمی دەیی[11] ئاشنایەتیمان هەیە. ڕژێمی دەیی، ئەو ڕژێمەیە کە بۆتە پەیڕەوی مرۆڤەکان بۆ کاروباری ڕۆژنە لە زۆر بواردا. زۆر جار، ژمارەی لەم شێوە دەنووسین و بەکاردێنین: 434.15 کە ڕەنووسەکانی ئەم ژمارەیە هەر یەکە و واتایەکی هەیە، بەم شێوەیە: لە ڕاست بۆ چەپ (ژمارە تەواوەکە 434): یەکان، دەیان، سەدان،...، لە دوای فاریزە (کەرتەکە 15): لە دەیان، لە سەدان، لە هەزاران.... بەم شێوە بەهەریەکێک لە مانە دەوترێت: کۆلکە (Coefficient) . گەر بە وردی سەیری ئەم نمونەی سەرەوە بکەین:

$$434.15 = (4 \times \mathbf{100}) + (3 \times \mathbf{10}) + (4 \times \mathbf{1}) + \left(\frac{1}{\mathbf{10}}\right) + \left(\frac{5}{\mathbf{100}}\right)$$

ئەمەش بریتییە لە سادەترین نووسینی ژمارەکان بەهۆی ڕژێمی دەیی (Base of 10) کە (10) بە توانی ژمارە سروشتییەکان، کە ئەمەش بۆ هەموو ژمارە ڕاستییەکانی تر بە هەمان شێوە بەکاردێت. بەڵام لەگەڵ

[11] ئەو ڕژێمەیە کە 10 جۆر ژمارە (لە 0 تا 9) بەکاردەهێنێت بۆ نووسین و دەربڕینی هەموو ژمارەکانی تر.

ئەوەش، هیچ شتێکی وا تایبەت نییە بڵێین کە تەنیا بە ڕژێمی دەیی دەتوانین ژمارەکان بنووسین، هەر هەمان ژمارە، دەتواندرێت بە ڕژێمی-سیستەمی: 'یەک و سفر' واتا 'دووانی' (Binary) بنووسرێت. بەو سیستەمە ئەم ژمارەیە: 8.3125 دەگۆڕێت بۆ 1000.0101 بە پێی سیستەمی دووانی، کە ژمارەکان لە چەپەوە بۆ ڕاست واتای ئەمەیە: دووانی، چواری، هەشتی... واتە 2 بە توانی یەکەکان (Units). لەو ژمارەیە کە نووسیمان 8.3125 لە ڕاستەوە: نیوە، چارێک، هەشت یەک... . ڕژێمی دووانی، لە ئێستادا ڕۆڵی سەرەکی دەگێڕێت لە کارپێکردنی کۆمپیوتەر و بەرنامەسازی، تەنانەت ئەو نووسینەی بن دەستت؛ کە بە کۆمپیوتەر نووسراوەتەوە، هەمووی پشتی بە ڕژێمی دووانی بەستووە. هۆکاری ئەوەی ئەو ڕژێمە بۆتە خەت و خاڵی کۆمپیوتەر، ئەوەیە کە کارکردن لەگەڵ ئەو ڕژێمە زۆر خێرایە بە بەراورد بە ڕژێمی دەیی، چونکە لەم ڕژێمە تەنیا 0 و 1 بەکاردێت.

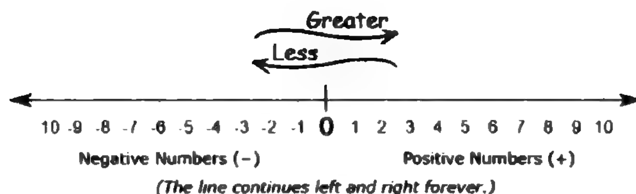
Decimal	Binary
0	0
1	1
2	10
3	11
- - -	- - -
10	1010
11	1011
12	1100

هێڵی ژمارەکان

Number line

هێڵـی ژمارەکـان، بـابەت و زارشـتێکی گـرنگە لە بیرکـاری بـۆ تێگەیشـتن و بیرکـردنەوە لە واتـای کـردارە بیرکارییەکـان، یـان بـۆ روونکـردنەوە و پیشـاندانی شـیکاری زۆرێـک لە هاوکێشـەکان و لاسـەنگەکان لەسـەر ئەم هـێڵە. هێڵـی ژمارەکـان، هێڵێکـی ڕاسـتە کە تێـدا بەش بەش کـراوە بە هێڵـی وەک چـیلکەی بچـوک، کە تێـدا هەمـوو ژمـارە تەواوە ئەرێنـی (+) و نەرێیەکـان (-) دەگـرێتە خـۆی بە شـێوەیەکی بنچینەیـی. ئەم هـێڵە، بە دوو ئاراسـتە بە بەردەوامـی بە بـاری ئاسـۆیی درێـژدەبێتەوە، ئەوانـیش بە ئاراسـتەی ڕاسـت و چەپ. کـرداری کـۆکردنەوەی لەسـەر هێڵـی ژمارەکـان ڕوونتـر و ئاسـانترە، وەک: 4+3 لە کـرداری کـۆکردنەوە، جـوڵانەوەی ئـێمە لە هێڵـی ژمارەکـان بەرەو لای ڕاسـتە، لەو نمـونەی سـەرەوە، لەسـەر هێڵـی ژمارەکـان لە ژمـارە 4 دا، 3 هەنگـاو پـاز دەدەیـن بـۆ لای ڕاسـت، هەر هەنگـاوێکیش دەبێـت یەک یەکە ببڕێـت نەک زیـاتر. بە هەمـانْ شـێوە بـۆ کـرداری لـێ دەرکـردن، جوڵەمـان بەرەو لای چەپ دەبێـت، بـۆ نمـونە: 5-3، لە ژمـارە 5 سـێ هەنگـاو پـازدەدەین بـۆ لای چەپ، کە هەر هەنگاوێـک دەبێـت یەک یەکە ببڕێـت نەک زیـاتر. ڕەنـگە پرسـیارێکت لا دروسـت بێـت، ئەویـش: ئەی ئەمـە: 10-1 چـۆنە لەسـەر هێڵـی ژمارەکـان؟ ئەمەشـیان ڕۆشـنە، لە ژمـارە یەکەوە 10 هەنگـاو پازبـدە بـۆ لای چەپ، کە ئەمەش دەکـاتە 9. مـومکینە پرسـیارێکی تـرت لا دروسـت بێـت، ئەم هـێڵە بەس ئەم

جـۆرە ژمـارانەی لەسـەرە؟ وەڵامەکە نەخێـر، بەڵکـو کەرتەکـانیش- ڕێژەیـی (Rational numbers) لەخـۆ دەگرێـت. بـۆ نمـونە لە نێـوان 0 و 1 دا نیومـان $\frac{1}{2} = 0.5$ هەیە، یـان $\frac{1}{3}$ هەیە، ئەو ژمـارانەش پێـان دەوتـرێن ژمـارە ڕێژەییەکـان (Rational numbers). بەڵام ئەوەش لە بیـرمەکە کە ژمـارە ڕێژییەکـانی نێـوان سـفر و یەک ئەوەنـدە زۆرن، کە لە توانـادانییە لەسـەر ئەم هـێڵە بنوسـرێت و ناشـکرێت. بەشـێکی تـری ژمارەکـانی سـەر ئەو هـێڵە، پێیـان دەوترێـت: ژمـارە نارێژەییەکـان (Irrational numbers). ژمـارە ڕێژەییەکـان و ژمـارە نارێژەییەکـان، بەیەکەوە کـۆمەڵەیەکی زۆر گەورە دروسـت دەکەن، کە پێـان دەوترێـت ژمـارە ڕاسـتییەکان (Real numbers). واتـا، کـۆمەڵەی ژمـارە سروشـتییەکان، تەواوەکـان، ڕێژەییەکـان و نارێژییەکـان هەموویـان بەیەکەوە کـۆمەڵەی ژمـارە ڕاستییەکان دروست دەکەن.





خێزانی ژمارەکان

Family of numbers

ژمارەکـان دەتوانـدرێت دابەشـبکرێنە سـەر چەنـد تـوخم و ڕەگەزێـک، کە جیایـان بکەیـنەوە بە پێـی ئەو خاسـییەت و تایبەتمەنـدییانەی هەیەتـی. چەنـدین ڕێگـا و شـێواز هەن بـۆ جیـاکردنەوەی ئەو ژمـارانە، کە لە شـتێک یـان سـیفەتێک لێکچونیـان هەیە و ، بیـانخەینە نـاو خێزانێـک، پاشـان نـاوێکی تایبەتییـان پـێ بـدەین. وەک چـۆن ناکۆتـا ژمارەمـان هەیە، بەم شـێوەیەش ناکۆتـا ڕێگـای هەمەجـۆر هەیە بـۆ جیـاوازی کـردن لە نێـوان جـۆری ژمارەکـان و بەش بەش کردنیـان-جیاکردنەوەیـان، وەک: ژمـارە سروشـتییەکان، ژمـارە تەواوەکـان، ژمـارە ڕێژەییەکـان، ژمـارە ناڕێژەییەکـان، ژمـارە ئاوێتەکـان، ژمـارە ڕاسـتییەکان، یـان هەمـوو ئەو شـتانەی کە ئـێمە لەو جیهـانە دەتـوانین بیـانژمێرین، وەک: جـۆری درەختەکـان، جـۆری پاسـکیلەکان... هتـد، کە هەمـوو ئەمـانە دەکرێـت هەر یەکەیـان وەک خێزانێـک دابنـێین. وتمـان کـۆمەڵەیەک هەیە گەورەیە، کە پێـی دەوتـرێ ژمـارە ڕاسـتییەکان، لەنـاو ئەم کـۆمەڵەیە، خێزانێکـی بچـوکتر هەیە پێـان دەوتـرێ ژمـارە ناڕێژەییەکـان، خێزانـی ژمـارە ڕێژەییەکـان و چەنـدین خێزانـی تـر لە خـۆ دەگرێـت، وەک: خێزانـی ژمـارە جەبرییەکـان و ژمـارە ناجەبرییەکـان-ترێسندێنتەڵەکان [12].

[12] ژمـارەی ترێسـندێنتەڵ (Transcendental number) بـریتییە لەو ژمـارەی کە جەبـری نییە، واتە نـابێتە شیکاری ڕادەدارێـک کە کۆلکەکـانی ژمـارەی ڕێـژەین. ژمـارەی جەبـریش ئەو

کاتێک دەڵێین ژمارەیەک سەر بە فلانە خێزانە، ئەمە واتە لە ڕێگەی شوناسی ئەو خێزانە؛ لە تایبەتمەندییە هەمەچەشنەکانی ئەو ژمارەیە دەگەین و ئەوەمان بۆ ڕوون دەبێتەوە کە ئێمە چ پرسیارگەلێک دەتوانین دەربارەی ئەم ژمارەیە بپرسین. زۆر جار، دروست بوونی ئەم خێزانانە، لە نەخشەیەکەوە (Function) سەرهەڵدەدات، کە نەخشەکە وەسفی چۆنییەتی دروستبوونی "یەکبەدوای یەکی" ژمارەکان دەکات، واتە لە ڕێگەی نەخشەیەکەوە دەتوانیت خێزانێک لە ژمارە دروست بکەین کە هەر ژمارەیەکی-دانە خێزانەکە لەو نەخشە بەدەستهێنراوە. یانیش، بۆ هەرخێزانێک، ڕێسایەک (Rule) هەیە کە وەسفی دانەکانی ئەم خێزانەی پێبکات و بیناسێنەوە.

ئێمە بە باشی ئاشنای ژمارە جووتەکانین (Even numbers)، بەڵام ئەو ژمارانە چین؟ بۆیە بە شێوەیەکی بیرکارییانە، دەتوانین بەو شێوە وەسفی هەموو ژمارە جووتەکان بکەین، ئەویش: ژمارە جووتەکان، ئەو ژمارە سروشتیانەن کە لەسەر ئەو شێوە: $2 \times n$ دەنووسرێت، کە n یش خۆی ژمارەیەکی سروشتییە. ئەگەر نرخی n یەک بێت، دەکاتە: $2 \times 1 = 2$، ئەگەر نرخی n دوو بێت، ئەوە $2 \times 2 = 4$ ، ئەگەر نرخی n بکاتە 3، ئەوا: $2 \times 3 = 6$ ....، ئەمەش دیارە کە هەموویان ژمارەی جووتن. بۆیە توانیمان لە ڕێگەی ئەم یاسایەوە، وەسفی چۆنییەتی دۆزینەوەی ژمارە جووتەکان بکەین، واتا سەرجەم ژمارە

ژمارەیە کە دەبێتە شیکار بۆ ڕادەدارێک کە کۆلکەکانی ژمارەی ڕێژەین، وەک: $\sqrt{2}$، بەڵام π ژمارەیەکی ترێنسندێنتەڵە، چونکە نابێتە شیکار بۆ ئەو جۆرە ڕادەدارەی باسمان کرد.

جووتەکـانیش پیـڕەوی ئەم یاسـایە دەکەن! کە هـیچ ژمـارەیەکی جـووت نادۆزیتەوە لەم یاسایە لابدات و قسەی بشکێنیت.

هەر هەرمـان پرسـیار بـۆ ژمـارە تاکەکـان (Odd numbers) ئەو ژمـارانە چـین و هـیچ یاسـایەک هەیە بۆیـان هاوشـێوەی ژمـارە جووتەکـان؟ یاسـاکەش بـۆ ژمـارە تاکەکـان بـریتییە لە: $2n+1$ ، دیـارە بەم یاسـایە سـەرجەم ژمـارە تاکەکـانی لـێ بەرهەم دێـت، کە هەمـوو ژمـارە تاکەکـانیش دەبێـت پەیـڕەوی ئەم یاسـایە بـکەن بە ڕووح و بە گیـان! ئەگەر نرخـی n یەک بێـت ئەوا: $3=1+2(1)$، ئەگەر نرخـی n دوو بێـت، ئەوا: $5=1+2(2)$، بەم شێوە، هەموو ژمارە تاکەکان بەرهەم دێن.

لە بیرکاریـدا خێزانێـک هەیە، کە کەم کەس هەیە لە نـاوی ئەم خێـزانەی خەبەردار نەبێـت، ئەویـش خێزانـی ژمارەکـانی فیبۆنـاچی (Fibonacci)[13] کە ئەمـانەن : $\{1،2،3،5،8،13،21،34،...\}$. ئەم خێـزانە، لە خێزانـی ژمـارە سروشـتییەکانەوە دروسـت دەبێـت، یاساکەشـی بەم شـێوەیە: هەر ژمـارەک لەو خێـزانە، لە سـەرجەمی دوو ژمـارەی پـێش خـۆی دروسـت دەبێـت. سـەرەتا لە 1 دەسـت پێـدەکەین، ئێسـتا: $1+1=2$ ،دواتـر ئەو ئەنجـامەی بەدەسـتمان هێنـاوە لەگەڵ ژمـارە ئەنجـامی پـێش خـۆی کـۆی بکەیـنەوە، $2+1=3$، لێـرە 3 دەسـتگیر بـوو، 3 لەگەڵ 2 کـۆبکەینەوە، دەکـاتە: 5، پاشـان 5 لەگەڵ 3 کـۆبکەینەوە، دەکـاتە: 8، وە 8

[13] لیۆنـاردۆ پیناسـۆ بیگولـۆ" ناسـراو بە "لیۆنـاردۆ فیبۆنـاچی". فیبۆنـاچی زانـای بیرکـاری بـوو لەچەرخەکـانی ناوەراسـت، لەسـالی 1202 واتە لەسـەدەی سـێزدەهەم. پەرتـووکێکی بەنێـوی (Liber Abbaci) هەیە، کە پەرتووکی ژمێرپارییە. لەگەڵ ئەمەش، کاری بازرگانی دەکرد.

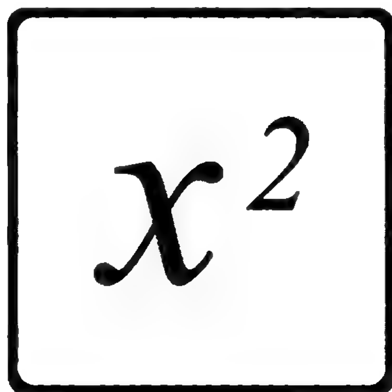
لەگەڵ 5 کــۆبکەینەوە، دەکــاتە: 13، ئــا بەم شــێوە ئەو خێــزانە دروســت دەبێــت. ئەم ژمــارەیە جــگە لە لایەنــی پەتیــیەکەی (Abstract)، لە زینــدەزانی گرنگـــی هەیە و لە هەنـــدێ دیـــاردەی زاوزێیـــی ئاژەڵەکانـــدا دەبینـــدرێت، هەروەهـــا پەیوەنـــدی بە ڕێـــژەی زێـــرین (Golden ratio) و سێگۆشـــەی پاسکاڵ (Pascal triangle) هەیە.

بەرچاوڕوونی زیاتر لە مەڕ ژمارەکانی فیبوناچی:

1   1+1=2   1+2=3   2+3=5   3+5=8   5+8=13 .

خێزانێکـــی تـــر کە دەتـــوانین بیهێنیـــنە بـــوون، ئەویـــش: هەر ژمـــارەیەکی سروشـــتی لێکـــدانی خـــۆی بـــکەی: یەک جـــارانی یەک، دوو جـــارانی دوو، ســـێ جـــارانی ســـێ، ....، ئەویـــش ئەو شـــێوەی دەبێـــت: ...،1،4،9،16 کە دیـــارە یاسەکەی ئەمیش بریتییە لە: n^2 ، یان دووجای n .

$1 \times 1 = 1$ ، $2 \times 2 = 4$ ، $3 \times 3 = 9$ ، $4 \times 4 = 16$ ، $5 \times 5 = 25$ ...



پێکەوەبەستانی ژمارەکان

Combining numbers

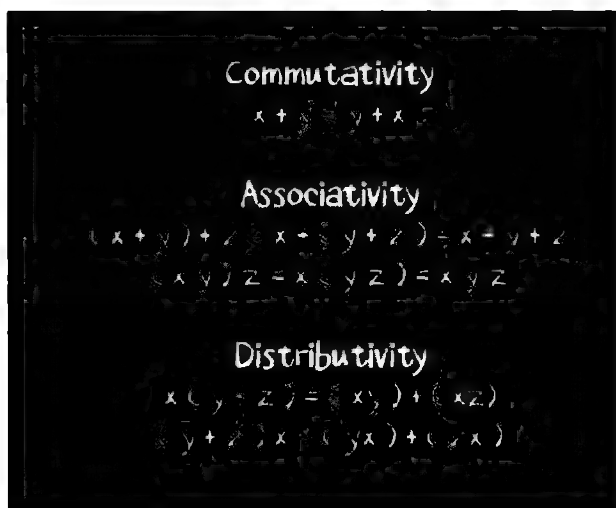
چەنــدین ڕێگــاو شــێواز هەن بــۆ ئەوەی دوو ژمــارە یــان زیــاتر بەیەکەوە ببەســتینەوە بەهــۆی کردارەکــانەوە، کە تێــدا دەتوانــدرێت دانەدەم بکــرێن بەهــۆی بەکارهێنــانی کردارەکــانی: کــۆکردنەوە، کەم کــردنەوە، جــاران و دابەش (ژێــرە ســفر نەبێــت)، ئەمەش بە ئاتــاجی دروســتکردنی ژمــارەیەکی تــر. لە ڕاســتیدا، ئەگەر ســەرنج بــدەینە: $a-b$، بە شــێوەی: $a+(-b)$ دەنووســرێت، یــان $\frac{a}{b}$، بە شــێوەی: $a\times\frac{1}{b}$ دەنووســرێت، کەواتە لە نــاو هەنــاوی هەر یەکێــک لە دابەش و کــۆکردنەوە، ئەوی تــر بــوونی هەیە. کردارەکــانی جــارانکردن و کــۆکردنەوە، تایبەتمەنــدییەکیان هەیە کە پێــی دەوتــــرێن تایبەتمەنــــدی ئــــاڵوگۆڕی (Commutative)، کە لەم تایبەتمەنــدییە، ڕێزبەنــدی ژمارەکــان لە کــاتی هەژمــارکردنی کردارەکــانی کــۆکردنەوە و جــارانکردن، جیــاوازییەک دروســت ناکــات[14]، بەڵام بــۆ کردارەکــانی تــر، یــان بــوونی زیــاتر لە کردارێــک لە نــاو بڕێکــی جەبــری یــان بڕێکــی نــاجەبری، جیــاوازی دروســت دەکــات و ئەنجــامەکە گۆڕانکــاری بەســەردا دێــت! بــۆیە، مەبەســت لەم تایبەتمەنــدییە ئەوەیە: بــڕەکە بەس جــاران یــان بەس کــۆکردنەوە لەخۆگرتبێــت، وەک: $1+2=2+1$ ، کە هــیچ جیــاوازییەکی نیــیە. ئەمە بــۆ دوو ژمــارە ئاســایی، کــارەکە ســادە بــوو، بەڵام ئەگەر بێــت و زیــاتر لە دوو ژمارەمــان هەبێــت یــان لەگەڵ چەنــد

---

[14] لێکدانی ڕیزکراوەکان (Matrices)، سیفەتی ئاڵوگۆڕی نییە: $A\times B\neq B\times A$.

کردارێـــک، ئەوە پێوســـت دەکـــات کەوانە ( ) بەکاربهێنـــدرێت، ئەگەر ســـێ ڕادەمـــان هەبێـــت، ئەوە دوو لەو ڕادانە، پێوســـتە بخـــرێنە نـــاو کەوانەیەک. وتمـان ئەگەر سـێ ڕادە بێـت، ئەوە دوو ڕێگـات هەیە (بەبـێ شـوێن گـۆڕینی ڕادەکان) بۆ ئەوەی دووان لەو ڕادانە بخیتە ناو کەوانە، بەم شێوەیە:

$a + (b + c)$ یان $(a + b) + c$. ئەم ســـــــیفەتەش پێـــــــی دەوترێـــــــت تایبەتمەنــدی "یەکتربەســتن" (Associativity). ســیفەتی "بەشــینەوە بەســەر کـــــردارى کـــــۆکردنەوە" (Distribution)، کە تێـــــدا ئەو ڕادەی لە پـــــێش کەوانەکە هەیە، دەبێـت خـۆی لێکـدانی هەمـوو ڕادەکـانی نـاو کەوانەکە بکـات. بە نمـونەیەکی ژیـانی ڕۆژانە: مامۆسـتا کە دێـتە پـۆل، بـۆ هەمـوو قوتابییەکـان وانە دەڵێـــتەوە، نەک تەنیـــا بـــۆ یەک یـــان دووان. لەم وێـــنەی خـــوارەوە تایبەتمەنـــدییەکان لەگەڵ ژمارەکـــان و کردارەکـــان خـــراوەتە ڕوو بـــۆ هەر یەکێکیان.



ژمارە ڕێژەییەکان

Rational numbers

ژمـــارە ڕێژەییـــەکان، لـــە ئـــەنجامی دابەشـــکردنی ژمارەیـــەکی تـــەواو (Integer) بەســـەر ژمارەیـــەکی تـــەواو (ســـفر نەبێـــت) دروســـت دەبێـــت. واتـــە ســـەرجەم ژمـــارە ڕێژەییـــەکان، دەتوانـــدرێت بە شـــێوەی کەرت بنووســـرێت. ئەو ژمـــــارەی کـــــە دابەشـــــدەکرێت، پێیـــــدەوترێت: ســـــەرە-بەشـــــکراو (Denominator)، لەکاتێکـــدا ئەو ژمـــارەی پێیـــی دابـــەش دەکرێـــت، پێـــی دەوترێت: ژێرە-بەشدراو (Numenator).

کاتێـــک ژمارەیـــەکی ڕێژەیـــی بەشـــێوەی دەیـــی دەنووســـرێت، دوو شێوازی هەیە: یـان کۆتـایی دێت و تـەواو دەبێت، یـاخود تـەواو نابێت، وەک: $\frac{1}{3} = 0.3333 ...$ کۆتـایی نایـەت و دیاریشـە یەکسـانن، ئەمەش دوو لقـی لـێ دەبێـتەوە. ئەگـەر سـەرنج بـدەیتە ئەو ژمـارە ڕێژەییـەی سـەرەوە کـە بەشـێوەی دەیـی نووسـراوە، دووبـارە دەبێتـەوە تـا ناکۆتـا بە شـێوەیەکی جێگـر یـان جـوان، ئەمەش واتـە گـەر هـاتوو ژمارەیـەکی دەیـی بەشـێوەیەکی دووبـارە نووسـراوە، ئـەوە ڕێژەییـە، بەڵام ئەگەر بە نـا-دووبـارەیی بەردەوام بـوو، ئەوە ژمـارەیەکی نـاڕێژەییە، چـونکە لە ژمـارە ناڕێژەییەکـان، هـیچ شـێوازێکی دووبـارەیی-ڕێـک بـوونی نییە. هەڵبـەتە چـونکە ژمـارە تـەواوەکان ناکۆتـان، کەواتە ناکۆتـا لە ژمـارە ڕێژەیمـان هەنە. بەڵام ئـەمە بـە واتـای ئـەوە نایـەت کـە ژمـارە ڕێژەییـەکان ژمارەیـان زیـاترە لـە ژمـارە تـەواوەکان، بـەڵکو

سەلمێنراوە کە هێندەی یەکتر دانەیان تێدایە (هەمان کاردینالەتیان هەیە).[15]

پەیدابوونی ئەو ژمارانە، بەهۆی سەرنجدان لە هاوکێشەکانەوە بوو، ئەویش: ئایا شیکاری هاوکێشەیەکی لەم شێوەیە: $2x - 3 = 0$ چییە؟ ئەو ژمارەیە دەبێت چەند (چۆن) بێت بۆ ئەوەی پاسەدانی ئەم جۆرە هاوکێشەیە بکات؟ ئەمەش دیارە کە ژمارەیەکە، لە تۆخمی ژمارە تەواوەکان و سروشتییەکان نییە.

$$\frac{a}{b}$$

[15] کاردینالیتی، واتە ژمارەی دانەکانی ناو کۆمەڵەیەک یان خێزانێک.

دووجاکان، ڕەگی دووجا و هێزەکان-توان

Squares, square roots, and powers

دووجای هەر ژمارەیەک x ، دەکاتە ژمارەکە لێکدانی خۆی، کە بە بیرکارییانە بەو شێوە دەنووسرێت: $x \times x = x^2$. زارشتی دووجا لە ڕاستیدا دەگەڕێتەوە بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری (Area) چوارلای یەکسان، کە تێدا بۆ هەژمارکردنی ڕووبەرەکەی؛ درێژی لایەک، جارانی خۆی دەکەین و ڕووبەرەکەمان دەست دەکەوێت. دووجای هەر ژمارەیەک، ئەنجامەکەی هەمیشە ئەرێنییە (+) و گەورەترە لە سفر یان سفرە ، هۆکاری ئەمەش ئەوەیە کە: $+ = (- \times -)$ ، باشە ئەمە چۆن؟[16] دووجای سفریش، هەر دەکاتەوە سفر. هەر بەم هۆیە، هەموو ژمارەیەکی دووجاکراوی ئەرێنی (+)، دەبێت دووجای دوو ژمارە بێت $+x$ و $-x$. بە شێوەیەکی گشتی، هەر ژمارەک، چەند جار جارانی خۆی بکرێت، ئەوە توانەکەش هەر ئەوەندە جارە دەبێت، واتە:

$$x^n \times x^m = x^{n+m} \text{ ، } (x^n)^m = x^{nm} \text{، } x^0 = 0 \text{ ، } x^1 = x \text{ ، } x^{-1} = \frac{1}{x}$$

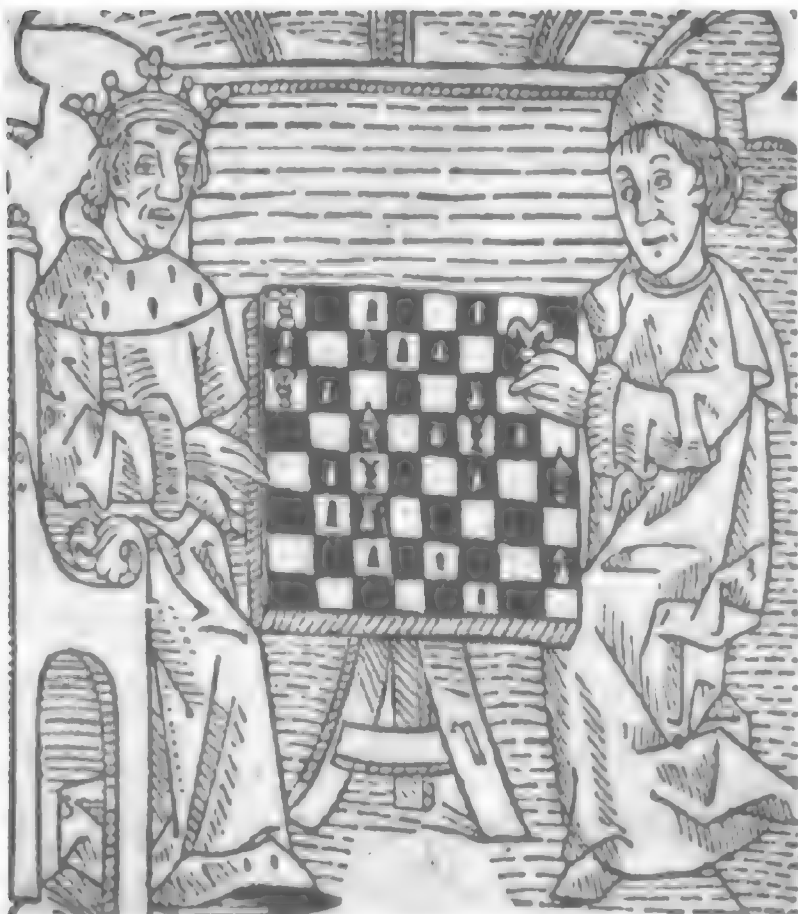
---

[16] دەتوانین ئەم ڕاستییە بسەلمێنین، ئەویش بەهۆی شێواز-میتۆدیکی سادە:

$$-2(0) = 0 \rightarrow -2(1-1) = 0 \rightarrow -2(1) \quad -2(-1) = 0$$

دیارە کە دەبێت نیشانەی نێوان ئەو دوو ڕادەیەی کۆتایی، بکاتە + ، چونکە یەکەم هەنگاو $-2(0) = 0$ ئەمە شتێکی ڕاستە، لە هەنگاوی کۆتایی بۆ ئەوەی ئەم ڕاستییە بپارێزرێت، ئەوە یەک ئەگەر هەیە، ئەویش ئەوەیە کە دەبێت: $-2(-1) = +2$

هەر لە شـــێوەی: $x^n \times x^m = x^{n+m}$ دا، ئەوەمـــان دەســـت دەکەوێـــت کە ڕەگـــی دووجـــای هەر ژمـــارەیەکیش دەتوانـــدرێت بە شـــێوەی بنچیـــنەک و توانیـــک بنووســـرێت، کە ڕەگـــی دووجـــا، دەبێـــتە: تـــوانی $\frac{1}{2}$ بـــۆ ژمـــارەی ژێـــر ڕەگەکە، واتە: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.



ژمارە خۆبەشەکان (سەرەتاییەکان)

Prime numbers

ژمـــارە خۆبەشـــەکان (ســـەرەتاییەکان)، ئەو ژمـــارە تەواوە ئایەکییـــانەن (+) کە تەنیـــا دوو بەشـــداربوو (Factor) هەیە، ئەوانـــیش "یەک و خـــۆی". لە 11 ژمـــــــــارەی ســـــــــەرەتای خۆبەشـــــــــەکان، ئەمـــــــــانەن: 2،3،5،7،11،13،17،19،23،29،31،... لەگەڵ ئەوەش، ناکۆتـــــــــــــا لەم ژمـــارانە هەن! ژمـــارە یەک، بە خـــۆبەش دانانـــدرێت[17]. ژمـــارە 2، یەکەم ژمـــارەی خۆبەشـــە، لەگەڵ ئەمەش، لە ژمـــارە جووتەکـــان، تەنیـــا 2 خۆبەشـــە. هەر ژمـــارەیەک کە خـــۆبەش نەبێـــت، پێـــی دەوتـــرێن ژمـــارەی دابەش (Composite number). هەمـــوو ژمـــارەیەکی دابەش، دەتوانـــدرێت لە ئەنجامی لێکدانی چەند ژمارەیەکی خۆبەش بنووسرێت، وەک:

$$12 = 2^2 \times 3 \text{ یان } 21 = 3 \times 7 \text{ یان } 270 = 2 \times 3^3 \times 5$$

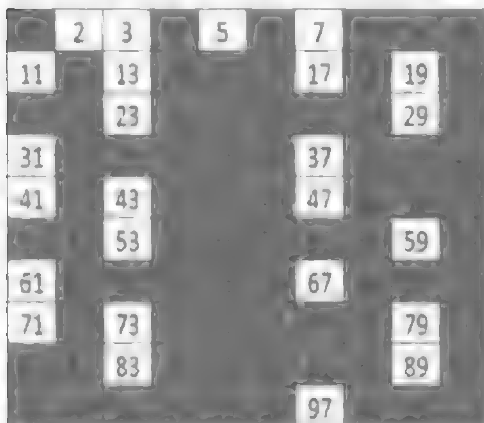
لەگەڵ ئەوەشـــدا، ژمـــارە خۆبەشـــەکان بە بنـــاغەیەکی ســـەرەکی تیـــۆری ژمارەکـــان دادەنـــدرێت. بـــۆ ئەوەی بـــزانین کە ژمـــارەیەک خۆبەشـــە یـــان نـــا، ئەمە وا پێنـــاچێ کـــارێکی هەروا ئاســـان بێـــت، ئەوە ڕوونە کە تەواوی ژمـــارە جووتەکـــان جگە لە 2، خـــۆبەش نـــین، بەڵام بـــۆ ژمـــارە تاکەکـــان، دۆزینەوەیـــان تۆزێـــک تـــاقەت پـــڕوکێنە. ژمـــارە خۆبەشـــەکان بنـــاغەیەکی بەهێـــزی بە نهێنـــی

[17] پرســـی ژمـــارە 1 کە بـــۆچی ئەم ژمـــارە خـــۆبەش نیـــیە، ئەمە دانوســـتانی بیرمەنـــدان و زانایـــانی بیرکـــارییە، چـــونکە ئەگەر بێـــت و 1 بە خـــۆبەش دابنـــدرێت، ئەوە یەکێـــک لە بیـــردۆزە هەرە سەرەکییەکانی تیۆری ژمارەکان لێکهەڵدەوەشێتەوە.

کـردنن لە بـواری پاراسـتن و ئاسـایش. گەلێـک کێشـەی بیرکـاری هەن، کە پەیوەسـتن بەو ژمـارانەوە، کە تـا ئێسـتاش شـیکارنەکراون، یەکێـک لە کێشـە هەرە دیارەکـــان، گریمـــانەی ریمـــانە (Riemann hypothis) کە پەیوەنـدی بە بڵاوبـوونەوەی ژمـارە خۆبەشـەکانە، واتە ئەو ژمـارانە چـۆن چۆنی بەنێو ژمارە سروشتییەکان بڵاو بوونەتەوە و دابەشبوونە؟!

"ژمارە خۆبەشەکان بە ئەتۆمی بیرکاری ناسراون"[18]

سروشـتی ئەم ژمـارانە هەڵخەڵەتێنـەرە لە دۆزینـەوە و درک کـردن بە تایبەتمەنـدییەکانی، کە هەر لە زووەوە، ماتماتیکزانەکـانی بە چـاخ و پەنـگ بـردووە[19]! لەگەڵ ئەمەش، تـا هەنـووکەش بـوونەتە کێشـە لەبەردەم هەنـدێ پرسـی چارەسـەرنەکراوی بیرکـاری. سـیمای تەلیسـماوی ئەو ژمـارانە، بەر لەهەمـوو شـتێک ئەوەیە کە؛ یاسـایەک یـا میتۆدێـک تـا ئێسـتا بـوونی نییـە بـۆ ئەوەی بتـوانین ئەو ژمارانەی پێ بەرهەمبێنین.[20]



---

[18] Tony Crilly. How big is infinity? (2014).

[19] لە خشتەبردووە.

[20] بلۆگی "بیرکاری بۆ کورد"

بەشدراوەکان و بەرماوەکان

Divisors and remainders

دابەشــــکردنی ژمـــــارەیەک بەســــەر ژمـــــارەیەکی تـــر، بە بـــێ ئەوەی بەرمـــاوەی لـــێ بمێنیـــتەوە، بەو هەمـــاهەنگییە دەڵـــێن: دابەش دەبێـت. ئەمەش واتە لە ئەنجـامی دابەشـەکە هـیچ بەرمـاوەیەک نـامێنێتەوە، وەک: ژمـارە 4 دەبێـــتە بەشــــدراوی (Divisor) ژمــــارە 12 ، ئەو 12 یە پێـــی دەڵـــێن: بەشـکراو (Divided)، کە 12 بەســەر 4 دابەش دەبێـت بەبـێ ئەوەی مـاوەی لـــێ بمێنیـــتەوە. بەلام ج دەربـــارەی 13 دابەشـــــی 4 ؟ لەم بـــارەدا، 4 بەشـدراوی 13 نیـیە، چـونکە 13 بە شـێوەیەکی تەواو دابەش نابێـت بەسـەر 3 بـێ ئەوەی بەرمـاوەی لـێ نەمێنیـتەوە، لەم بـارەدا، ئەنجـامەکە دەکـاتە 3 و بەرمـاوە 1 . بە ڕێگـایەکی تـر دەتـوانین بڵـێن: گەورەتـرین ژمـارەی تەواوی لە 13 بچـــــوکتر بـــــــریتییە لە 12 کە دابەشــــــی 4 دەبێـــــت، واتە: 1 + 12 = 13، کە لێـــرەوە بەرمـــاوەکە دەبینـــین کە بـــریتییە لە 1. کە دیاریشە ئەنجامی ئەو دابەشکارییە دەکاتە $3\frac{1}{4}$ (3 تەواو + ¼).

ژمـــــــــــــارە 3 و 4 هەردووکیـــــــــــــان 12 دابەش دەکەن (هەروەهـــــا 6،2،1 و 12). ئەگەر ژمـــارەیەکی سروشـــتی p، دابەشـــــی ژمـارەیەکی تـر q بکەیـن، q لەم بـارە p دابەش نەکـات، ئەوە ژمـارەیەکەی تـر r هەیە کە پێـی دەڵـێن: بەرمـاوە، کە ئەم r لە q بچـوکترە. ئەمەش واتە یاســـا گشـــتییەکەی بەم شـــێوەیە: $p = kq + r$ کاتێـــک k ژمـــارەیەکی سروشتییە.

ئەگەر دوو ژمارەی p و q مان هەبێت، گەورەترین کۆلکەی هاوبەش؛ بریتییە لە گەورەترین ژمارە، کە تیدا p و q هەردووکیان بەسەریدا دابەش دەبن. لەبەر ئەوەی 1 ژمارەیەکی شازە و هەموو ژمارەیەک بەسەر 1 دابەش دەبێت، بۆیە گەورەترین کۆلکەی هاوبەش بریتییە لە 1 یان گەورەترە لە یەک. ئەگەر لە بارێک گەورەترین کۆلکەی هاوبەش 1 بوو، ئەوە ئەو دوو ژمارەیە پێیان دەوترێن: هاوەڵە خۆبەش (Coprime).

لە رێگەی ژمارەی دابەشکەر دەگەین بە خێزانێکی تری ژمارەکان، کە زۆر سەرنج راکێش و عەزیمن، کە پێیان دەوترێن ژمارە "بێخەوشەکان" یان ژمارە "نمونەییەکان" (Perfect numbers). ژمارە بێخەوشەکان، ئەو ژمارانەن کە سەرجەمی بەشداربووە شیاوەکانی (واتە ژمارەکە خۆی لەگەڵ نییە) پێکەوە، ئەنجامەکەی هەر دەکاتەوە ژمارەکە خۆی. بۆ نمونە: ژمارە 6 ژمارەیەکی بێخەوشە[21]، چونکە بەشداربووەکانی 6 بریتین لە: 3،2،1 ، کە کۆی ئەم ژمارانە: $1 + 2 + 3 = 6$ دەکاتەوە ژمارەکە خۆی کە بریتییە لە 6. ژمارەیەکی تر، بریتییە لە: 28 کە بەشداربووە شیاوەکانی بریتین لە: 14،7،4،2،1 کە کۆی ئەو ژمارانە: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ دەکاتەوە ژمارەکە

[21] لە پەرتوکی (The book of numbers.Tim Glynne-Jones) لە وەسفی ژمارە 6 نووسراوە: ژمارە 6 لە بەر ئەو هۆیە ژمارەیەکی بێخەوش نییە کە خودا دونیای بە 6 رۆژ دروست کرد، بەڵکو خودا دونیای بە 6 رۆژ دروست کرد چونکە 6 ژمارەیەکی بێخەوشە.

خــــۆی. ســــــێیەم ژمـــــارەی بـــــێخەوش، بــــــریتییە لە 496 کە کــــۆی بەشـــــداربووەکانی:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$$

دەکاتەوە خۆی.

ژمـــارە بێخەوشـــەکان زۆر نـــاوازەن و دۆزینەوەیـــان ئاســـان نیـــیە (دۆزیـــنەوەی ئەو ژمـارانە پشـتی بە ژمـارە خۆبەشـەکان بەسـتووە، هەر بـۆیە ئیقلیـد یاسـایەکی بـۆ دۆزیـنەوەی ئەم ژمـارانە داتاشـیووە). لەگەڵ ئەوەش تـا هەنووکە بیرکاریزانان توێژینەوە دەکەن لە سەر پرسێک:

❖ ئایا ژمارە بێخەوشەکان هەر هەموویان جووتن؟

تـا زیـاتر بـڕۆین، ئەوە مەودای نێـوان دوو ژمـارەی بـێخەوش زیاتر و زیاتر دەبێت.

Perfect Number	Positive Factors	Sum of all factors excluding itself
6	1, 2, 3, 6	6
28	1, 2, 4, 7, 14, 28	28
496	1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496	496
8,128	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064, 8128	8,128

ئالگۆریتمی ئیقلید

Euclid's algorithm

ئــــالگۆریتم، لە ســــادەترین پێناســــە؛ بــــریتییە لە میتــــۆدی-شــــێوازی شــــیکارکردنی کێشــــەیەک بە پابەنــــد بــــوون بە هەنــــدێک ڕێســــای هەنگــــاو بە هەنگــــاو، کە بــــارێکە ڕێســــاکان دووبــــارە و چەنــــدبارە بەکاردەهێنــــدرێتەوە بــــۆ گەیشــتن بە ویســتێک (ئامــانج). ئــالگۆریتمی ئیقلیــد، ئــالگۆریتمێکی دێرینــی زۆر لەمەوپێشە، کە بە نزیکەیی 300 ساڵ بەر لە زاین.

ئەم ئــــالگۆریتمە، بــــۆ دۆزیــــنەوەی گەورەتــــرین بەشــــدراوی هــــاوبەش (GCD-Greatest common divisor) لە نێــــوان دوو ژمــــارە، بەکاردێــت. ئــــالگۆریتم، ســــەرەکترین شــــتە لە زانســــتی کۆمپیــــوتەر، کە تێــــدا ئــامێرە ئەلکترۆنییەکــان لەســــەری ڕۆنــراون بــۆ بەرهەم هێنــانی دەرئەنجــامی بەســــود. بە کــــورتی و پــــوختی، ئــــالگۆریتمەکەی ئیقلیــــد ئەوەیە : **گەورەتــــرین بەشــــدراوی هــــاوبەش لە نێــوان دوو ژمــــارە، دەکــاتە بەشــدراوی هاوبەشــی جیــــاوازی نێــــوان دوو ژمــــارەکە.** بەم شــــێوەیە دۆخەکە چەنــــدین جــــار دووبــارە دەکــرێتەوە تــا لەکۆتــایی دەبێــتە "ســفر"، بــۆیە، ئەو ژمــارەی کە بــووە هــــۆی بەرهەم هێنــــانی ئەو ســــفرە، ئەوە دەبێــــتە گەورەتــــرین بەشــــدراوی هاوبەشــــی دوو ژمــــارە ڕەســــەنەکەی یەکەم؛ کە ویســــتمان گەورەتــــرین بەشــدراوی هاوبەشــیان بــۆ بــدۆزینەوە. گەورەتــرین بەشــداری هاوبەشــی نێوان دوو ژمارەی وەک b و a بەم شێوەش دەنووسرێت:

گەورەتـــرین بەشـــدراو= $(a.b)$. بـــۆ نمـــونە: $4 = (12.8)$ ، واتە گەورەتـــرین بەشـــدراوی هاوبەشـــی نێـــوان 8 و 12 بـــریتییە لە 4. بەهـــۆی ئـــالگۆریتمی ئیقلیـــد، بەو شـــێوە GCD دەدۆزیـــنەوە بـــۆ ئەو دوو ژمـــارەی سەرەوە:

$$12 - 8 = 4 \rightarrow 8 - 4 = 4 \rightarrow 4 - 4 = 0$$

لێـــرە دەبینـــین کە لە $4 - 4$ گەیشـــتینە ســـفر، بـــۆیە GCD ی ئەو دوو ژمارەیە (8 و 12)، بریتییە لە 4.

FINDING THE GCD OF 585 AND 442

Simple version of Euclid's algorithm: 15 steps

585 − 442 = 143, so consider 442 and 143
442 − 143 = 299, consider 299 and 143
299 − 143 = 156, consider 156 and 143
156 − 143 = 13, consider 143 and 13
143 − 13 = 130, consider 130 and 13

[illegible]
[illegible]

13 − 13 = 0, so the GCD is 13

Standard version of Euclid's algorithm: 3 steps

[illegible] = 1 (remainder 143)
[illegible] = 3 (remainder 13)
[illegible] = 11 (no remainder)

[illegible]

ژمارە ناڕێژەییەکان

Irrational numners

ژمارە ناڕێژەییەکان، ئەو ژمارانەن کە ناتوانرێت بە شێوەی دابەشکردنی ژمارەیەکی تەواو بەسەر ژمارەیەکی تری تەواو (سفر نەبێت) بنووسرێت. بە واتایەکی تر: ئەو ژمارەیە کە ڕێژەیی نییە[22]. یاخود گەر هاتوو لە شێوەی ژمارەیەکی دەیی نوسرا، ئەوە ئەو بەشەی دوای فاریزە، واتە دەییەکە، ڕەنووسەکانی تا ناکۆتا هەر بەردەوام دەڕوات بە شێوازێکی نارێک. فراوانبوونە دەییەکەی ژمارەی ناڕێژەیی، هیچ شێوە سازییەکی خولگەیی دووبارەی تیادا نییە.

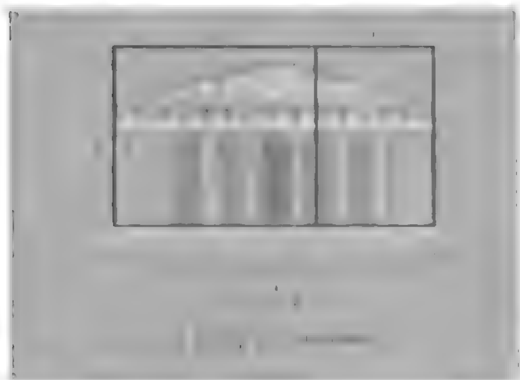
ژمارە ناڕێژەییەکان بە هەمان شێوەی ژمارە سروشتیەکان و ڕێژەییەکان، لەڕووی قەبارەوە ناکۆتان (قەبارە مەبەست لە ئەندازە نیە لێرەدا، بەڵکو مەبەست ئەوەیە ناکۆتا ژمارەی لەم شێوە بوونی هەیە)، واتە کاردینالی-ژمارەی دانەکانی ژمارە ناڕێژەییەکان ناکۆتایە. بەلام جیاوازە لە ژمارەی دانەکانی ژمارە سروشتیەکان و ڕێژەییەکان، بەمانایەکی تر، ژمارەی دانەکانی ژمارە ناڕێژەییەکان، گەورەترە لە ژمارەی دانەکانی ژمارە ڕێژەییەکان و سروشتیەکان، یان باشترە بڵێین: ڕاستە هەردووکیان ناکۆتا ژمارەیان تیادایە، بەلام ناکۆتایی ناڕێژەییەکان

---

[22] ئەو پێناسە هەندێک سەیر دەردەکەوێت: ژمارەی ناڕێژەیی، ئەو ژمارەیە کە ڕێژەیی نییە. شتێک هەیە کە ڕێگەمان پێ دەدات بەو شێوە پێناسەی ژمارە ناڕێژەییەکان بکەین، ئەویش ئەوەیە: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \mathbb{R}$.

گـــەورەترە لـــە ڕێژەییـــەکان. نابێـــت جیاوازیـــەکی تـــری نێـــوان ژمـــارە ناڕێژەییـــەکانمان لـــە بیربچێـــت، ئەویـــش ئەوەیە: کـــە نـــەژمێردراون (non-countable) لـــە کاتێکـــدا ژمـــارە ڕێژەییـــەکان ژمێـــردراون (Countable).

لـەناو ژمـارە ناڕێژەییەکانـدا، کۆمـەڵێک ژمـارەی زۆر ناسـراو هـەن، لەوانـە : نـەگۆری پـای، کـە بە π هێمـا دەکرێـت، کـە دەکاتـە ڕێـژەی نێـوان چێـوەی بازنـە بـۆ تیرەکـەی. نەگـۆڕی ئۆیلـەر e. ڕێـژەی زێـڕین (Golden ratio)، یـان ڕەگـی دووجـای دوو $\sqrt{2}$،[23] کە ئەمـانە هەموویـان ژمـارەی ناڕێژەین.



ئەم وێنەیە، ڕێژەی زێڕین[24] دەتوێنێت.

---

[23] دەگێـڕنەوە: ڕەگـی دووجـای دوو، یەکێـک لە فیساگۆرسـییەکان ئەم ژمـارەی دۆزیـیەوە، وتـی: ئەم ژمـارەیە شـتێکی سـەیری هەیە، ئەویـش ئەوەیە ناتوانـدرێت بە شـێوەی کەرت بنووسـرێت. لەبەر ئەوەی فیساگۆرسـییەکان باوەڕیـان بە ژمـارە ناڕێژەییەکـان نەبـوو لە سـەرەتادا، بـۆیە چاویـان لەو ئەنـدامەیان سـورکردەوە، تـاکو لەگەڵ خۆیـان بردییـان بـۆ گەشتێک. بەڵام لە گەشتەکە بەبێ ئەو گەڕانەوە!

[24] لە بیرکـاری و هەروەهـا لە هونەرەکانیشـدا، دوو بڕ لە تەک یەکتـرا، دەبـنە خـاوەنی ڕێـژەی زێـڕین کە نەگـۆڕێکە لە بیرکاریـدا کە بە نزیکەیـی دەکـاتە: 1.618 . (بلـۆگی بیرکـاری بـۆ کورد)

ژمارەی جەبری و ژمارەی ناجەبری

Algebraic and transcendental numbers

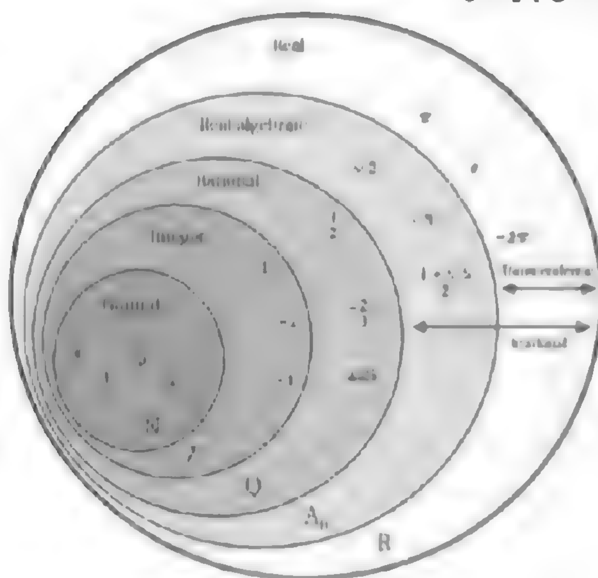
ژمارەی جەبری، ئەو ژمارانەن کە دەبنە شیکار (Solution) بۆ هاوکێشەیەک، کە کۆلکەی نەزانراوەکانی هاوکێشەکە ژمارەی ڕێژەین. ژمارەی نا جەبری، ئەو ژمارانەن کە نابنە شیکار بۆ ئەم جۆرە هاوکێشانە. لە ژمارە جەبرییەکیان وەک: $\sqrt{2}$ کە دەبێتە شیکار بۆ هاوکێشەی: $x^2 - 2 = 0$ ، لە کاتێک کە ڕەگی دووجای دوو ژمارەیەکی ناڕێژەییە، واتا ناتواندرێت بە شێوەی کەرتی $\frac{a}{b}$ بنوسرێت.

لە گەڵ ئەوەش، هەموو ژمارە ڕێژەییەکان ژمارەی جەبرین، بەڵام بۆ ناڕێژەییەکان مەرج نییە. بەڵگە بۆ ئەوەی کە هەموو ژمارە ڕێژەییەکان ژمارەی جەبرین، ئەمەیە: گریمان ژمارەیەکی ڕێژەیمان هەیە: $\frac{a}{b}$ دیاریشە ئەم کەرتە، شیکارە بۆ هاوکێشەی: $bx - a = 0$. وەک گوتمان ئەمە بۆ هەموو ژمارە ناڕێژەییەکان ڕاست نییە. هەر بۆیە کارکردن لەگەڵ هاوکێشەکان، بۆ بیرکازیانەکان هەندێ تاقەت پڕوکێنە و کاتی ئەوێ، چونکە ڕاوکردن لەم بابەتە ئاسان نییە. لە ژمارە ناجەبرییەکانیش، وەک: π ، کە نابێتە شیکار بۆ ئەو جۆرە هاوکێشانەی کە لەسەرەوە باسمان کرد.

مەسەلەی ڕەگی دووجای دوو $\sqrt{2}$، لە ئەنجامی سێگۆشەی فیساگۆرسەوە سەرئاو کەوت، کاتێک، هەر یەکێک لە تەنیشت و بەرامبەر 1 بێت، ئەوە بە پێی یاسایی فیساگۆرس، دەگەینە $\sqrt{2}$.[25]

$$1^2 + 1^2 = c^2 \rightarrow c^2 = 2 \rightarrow c = \sqrt{2}$$

ئەم هێلکارییەی خوارەوە، کۆمەڵەی ژمارە جیاوازەکان دەنوێنێت، وە پەیوەندی نێوانیان، واتە کامە لە کامە بنەیە و، کامە کۆمەڵە لە هەموویان گەورەترە یان بچوکترە، پیشاندەدات. لەگەڵ ئەو دوو جۆرە ژمارەی باسمانکرد، دەبینین کە دەکەونە کوێ لە پەیوەندی کۆمەڵەی هەموو ژمارەکان بەیەکەوە.



[25] وەرگێر.

پای

π

نەگــۆڕی پــای π، بەر لە 4 هەزار ســاڵ دۆزراوەتە و مرۆڤــایەتی لەم ژمــارەی ڕوانیــووە و بەکــاری هێنــاوە. بەڵام بەکارهێنــانی ئەو ژمــارەیە، بەهــاکەی ئەو شــێوەی بەهــای ئێســتا نەبــووە کە هەیە، بەڵکــو ئەو نــرخە، بە نزیکەیــی جیــاواز بــوو لەوەی ئێســتا زانــراوە. پــای، ژمــارەیەکی نــاجەبرییە وەک لە بــابەتی پێشــوو باســکرا. بیرکاریزانەکــانی بــابلی کــۆن، هەژمــاری ئەو نەگۆڕەیــان کــرد، بەڵام بە شــێوەیەکی ورد نەبــوو. بابلییەکــان چێــوەی بازنەیــان بە قەد ســێ ئەوەنــدەی تیــرەی بازنەیــان مەزەنــدەکرد، واتە لەو ســەردەمە، نرخــی پــای بریتیــی بــوو لە 3. بەڵام یەکێــک لە ئاســەوارەکان؛ تــابلۆ قوڕینەکــان لە نێــوان (1900-1680) لە پــێش زایــن، ئەم ڕاســتییە دەردەخــات، کە یەکێــک لە بابلییەکــان، گەیشــتە نرخێکــی جیــاواز تــر لەو نــرخەی پێشــتر بــۆی دانرابــوو، ئەویــش (3.125) بــوو، ئەمەش دیســانەوە نزیــک بــوونەیەوەکە لە نرخــی ئێســتای نەگــۆڕی پــای. لە دوای شارســتانییەتی بابلییەکــان، شارســتانییەتێکی تــر پەیــان بەو ژمــارەیە بــردووە، ئەوانــیش میصــرییەکان بــوون. میصــرییەکان لە تــوێژنەوە و وردبوونەوەیــان لەو مەســەلەیە، پایــان بە 3.1605 مەزەنــدەکرد. یەکەمــین خەملانــدنی تەواو، بــۆ چەنــد ڕەنووســێک بــۆ ئەم نەگــۆڕە، لەســەر دەســتی ئەرخەمیــدز بــوو. ئەرخەمیــدز یەکــێکە لە بیرکــاریزانە هەرە مەزنەکــانی مرۆڤــایەتی، کە لە نێــوان ســاڵەکانی 282-212 بەر لە زایــن لە ســیراکیوز ژیــاوە. ئەرخەمیــدز

هەژماری نزیکەیی ڕووبەری بازنەی کرد بە بەکارهێنانی بیردۆزی فیساگۆرس، ئەویش لە دۆزینەوەی ڕووبەری دوو 5 لای ڕێک (پۆلیگۆن-Polygon). چۆنییەتی کارەکەش بەو شێوە بوو: دانانی چەندین پۆلیگۆن-چەندلاک لە ناو بازنەکە. ئەرخەمیدز لەم ڕێگەیە پیشانی دا کە نرخی پای بە وردی دەکەوێتە نێوان دوو ژمارە، ئەوانیش: $3+\frac{1}{7}$ و $3+\frac{10}{71}$.بەم شێوە، پای بە نێو شەمەندەفەری مێژوو ڕۆیشتووە. سەبارەت بە هێمای پای، ئەم هێمایە، هێمایەکی گریکییە کە لە ساڵی 1700 بەکارهێنرا بۆ ئەو نەگۆڕە مەزنە! لە لایەن ویلیام جۆنیس (William Jones) دواتر ئەم دورشم و هێمایە گەیشتە قیمە لە لایەن بیرکاریزانی بە ناوبانگ 'لیۆنارد ئۆیلەر'. هەر سەبارەت بەم باسە، بیرکاریزانێکی فەرەنسی خەملاندنێکی بۆ ئەم ژمارەیە کرد لە ڕێگەی ئەگەریەوە. هەروەها ئەفسانەی هیندیش 'ڕامانووجان' لەو مەسەلەیە میتۆد و قسەی خۆی هەبوو.[26] لە ساڵی 2019 بە یارمەتی کۆمپیوتەر، تواندرا زیاتر لە 31 ترلیۆن ڕەنووسی کەرتی (Decimal) پای بدۆزرێتەوە.

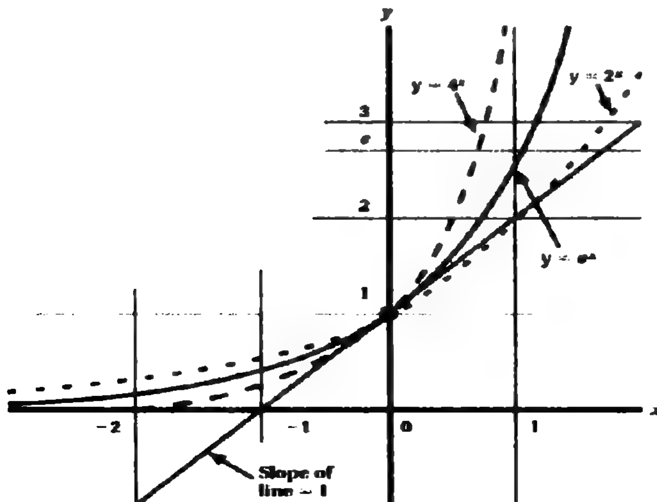
3.14159265358979323846264338327950288419716
9399375105820974944592307816406286208998628
034825342117067982148086513282306647093844
609550582231725359408128481117450284102701 9
385211055596446229489549303819644288109756
6593344612847564823378678316527120190914564
85669234603486104543266482133936072602491 4
1273724587006606315588174881520920962829254
09171536436789259036001133053054882046652 1
3841469519415116094330572703657595919530921
8611738193261179310511854807446237996274956
7351885752724891227938183011949129833673362
4406566430860213949463952247371907021798609
4370277053921717629317675238467481846766940
5132000568127145263560827785771342757789609
1736371787214684409012249534301465495853710
50792279689258923542019956112129021960864034
4418159813629774771309960518707211349999998
372978049951059731732816096318595024459455...

[26]ئەم بابەتەم پێشتر لە بلۆگی بیرکاری بۆ کورد (www.math4kurd.wordpress.com) بڵاو کردۆتەوە لە پەرتوکەکە بە کورتی باسی لێکراوە، بۆیە منیش بە شتێک زیاتر باسم کردووە بۆ ئەوەی سەرنجڕاکێشتر بێت.

$$e \approx 2.718$$

e ژمـارەیەکی نـاڕێژەیی و لە هەمانکاتـدا ژمـارەیەکی نـاجەبرییە. ئەم ژمـــارەیە گرنگییەکـــی ئێجگـــار زۆری هەیە و یەکـــێکە لە ســــەرەکیترین ژمارەکـان، کە لە زۆرێـــک لە بـــابەتە بیرکارییەکـــان و تەنـــانەت لە فیزیـــا و زانســــتەکانی تـــریش، بەکـــاربەریی هەیە. نـــرخەکەی بە نزیکـــی دەکـــاتە 2.718281828459045235360287. ئەم ژمـــارەیە ســــەقفی سروشـــتی شـــیکردنەوە بیرکارییـــانەیە، تەنـــانەت بـــۆ فیزیکزانەکـــان و ئەنـــدازیاریەکانیش، مـــایەی خۆشـــحاڵییە کە ئـیش لەگەڵ ئەم ژمـــارەیە بـــکەن، لەکاتێـک ئیشـــکردن لەگەڵ بنچیـنەیەک بە تـوانی 10 یـان بنچیـنەی 10 جـا بە هەر توانێـک، یـان e بە تـوانی ژمـارەیەک، گـرانییەک دروسـت ناکـات. هەر لەم پرسـە، لۆگـاریتم بە بنچیـنەی e ، ناسـێندراوە بە لۆگـاریتمی سروشـتی (Natural logarithm). بەهەمـــان شـــێوە π و e، گەلێـــک دەبـــڕین و پەیوەنـــدییان پـــێکەوە هەیە. نەگـۆڕی e تـاکە ژمـارەیە کە داتاشـراوەکەی لە تـوانی x (e^x) کاتێـک x گـــۆڕاوێکە، هەر دەکـــاتەوە خـــۆی! ئەم ژمـــارەیە گرنگییەکـــی ئێجگـــار زۆری هەیە لە بــــــابەتی ئەگەر (Probability) کە نوانــــــدنی هەیە لە شــــــێوەی زنجیرەیــــــی ناکۆتــــــا. لەگەڵ ئەوەش، e پەیوەنــــــدییەکی لەگەڵ π دا هەیە، لەبەر ئەوەی لە نەخشــــــە سێگۆشــــــەییەکان کە دەکرێــــــت بەهــــــۆی ئەم ژمـارانەوە بنوسـرێت و گوزارشـتییان لـێ بکرێـت، یـاخود لە بـابەتی ژمـارە ئاوێتەکــــــان (Complex numbers). پــــــای π و e پــــــێکەوە لە هاوکێشــــەیەک کــۆدەبنەوە، هەر بەو هــۆیەش، نەخشــە سێگۆشــەییەکان زۆر جــار بەهــۆی ئەمــانەوە دەکرێـت بنووسـرێت. هاوکێشــەیەکی زۆر جــوان لە

هەمـــبەر ئەو ژمـــارانە هەنە، ئەویـــش "هاوئەنجـــامی ئـــۆیلەری" پـــێ دەوترێـــت: $e^{i\pi} + 1 = 0$ ، کە بە جوانترین هاوکێشەی بیرکاری ناسێندراوە.



ئەم وێـــنەیە، ڕوونکردنەوەیـــی ســـێ نەخشـــە دەنووێنێـــت، ئەوانـــیش نەخشەکانی:

$$y = 4^x \quad ، \quad y = 2^x \quad ، \quad y = e^x$$

لێـــرە پرســـیارێک دروســـت دەبێـــت، e بـــریتییە لە ژمـــارەیەک وەک ژمارەکـــانی تـــر، بـــۆچی نەخشـــەکانی تـــر بە بنچیـــنەی ژمـــارە و تـــوانی x داتاشـــراوەکەیان ناکـــاتەوە نەخشـــەکە خـــۆی، لەکاتێـــک ئەمە بـــۆ نەخشـــەی $y = e^x$ ڕاستە؟[27]

[27] لە قۆنـــاغی دووی زانکـــۆ ئەو پرســـیارەم لا دروســـت بـــوو، بە گەڕان و ســـوڕان، وەڵامەکەم دەست کەوت، پێم باش بوو هەمان پرسیارە ئاراستەی خوێنەری هێژا بکەم.

لۆگاریتم

Logarithms

لۆگــاریتم، یەکێــک لە گرنگتــرین یاســاکانی بــواری زانســت، بەجۆرێــک، دەکەوێــتە نــاو گرنگتــرین 17 هاوکێشــەکان. لۆگــاریتم وەک دەســتەواژەیەکی بیرکاییــانە، بە پــێچەوانەی تــوان-هێــز کاردەکــات. بــۆ نمــونە: لۆگــاریتمی 1000 بە بنچیــنەی 10 دەکــاتە 3، واتە $10^3 = 1000$. ئــێمە لە ڕێــگەی لۆگــاریتمەوە دەتــوانین هێــزی زەمــین لەرزە -بــومەلەرزە بــزانین، جــگە لە چەنــدین ســودی زۆر گرنگــی تــر. بــۆ نمــونە: ئەگەر ژمارەیەکمــان هەبێــت بە تــــــوانی ژمــــــــــــارەیەک، واتە $a^n = x$ وە $a^m = y$ لەمەوش $a^n a^m =$ a^{n+m} دەســـتدەکەوێت، هەر ئەم دەســـتەواژەیە دەتوانـــدرێت لەســـەر شـــێوەی لۆگاریتم، واتە فۆرمی لۆگاریتم بنووسرێت:

$$(a^n)^w = a^{nw} \text{ و یان } log(xy) = log(x) + log(y)$$

ئەمـــیش لە فـــۆرمی-شـــێوازی لۆگـــــاریتم بـــریتییە لەو هاوکێشـــەیە: $log(x^w) = w\,log(x)$. ئەو یاســـایانەی کە پێشـــتر بەکاردەهێنـــدران بـــۆ ســـــادەکردنەوەی هەژمـــــارە گەورەکـــــان پـــێش ئەوەی ئـــامێر و ئەژمێـــرە ئەلکترۆنییەکـــان پەیـــدا بێـــت، ئەوە بەهـــۆی دوو ڕاســـتەوە (Ruler) کە بە پارسەنگی لۆگاریتمی ناسراوە، ئەنجامدەدرا.

$$i = \sqrt{-1}$$

i ژمارەی ئاویتە- خەیالی یان ئاڵۆزیشی پێدەڵێن. i [28]کە بۆ نواندنی ڕەگی دووجای (1-) بەکاردێت. ئەم ژمارەیە لە ژیانی ڕۆژانە بەکەڵکی ژماردن نایەت، واتە ناتوانین بۆ کڕین و فرۆشتن بەکاری بێنین، هەر بۆیە ناسراوە بە ژمارە خەیاڵییەکان یان ئاویتەکان. چەمکی ژمارە ئاویتەکان، گرنگە و کۆمەکیمان دەکات لە شیکارکردنی هەندێک جۆری هاوکێشەی وەک : $x^2 + 1 = 0$ ، دیاریشە تەنیا ڕەگی دووجای (1-) واتە $\sqrt{-1}$ شیکارە بۆ ئەم هاوکێشەیە. کە دەشتوانین بەو شێوەی لێی بنۆڕین: $x^2 = -1$. پێشتر وتمان کە دووجای هەر ژمارەیەکی ئەرێنی (+) یان نەرێنی (-) هەمیشە ئەرێنییە (+)، بەڵام لێرە کەشەکە جیاوازە، ئەوەش واتا ناکرێت هیچ یەکێک لە ژمارە ڕاستییەکان ببنە شیکار بۆ ئەم هاوکێشەیە، لەگەڵ ئەوەش، دوو نرخ شیکاری هاوکێشەکە دەکات، لەکاتێک دووجای ئەرێنی و نەرێنی نرخەکە دەکاتەوە نەرێنی یەک! واتە: $\left(\pm\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ ، بەڵام ژمارە خەیاڵییەکان بەو شێوەیە ئاڵۆز و خەیاڵاوی نین کە بە ڕووکەش دیارە![29]

[28] بیرکاریزانی سویسری "لیونارد ئۆیلەر"، یەکەم کەس بوو هێمای i بەکارهێنا بۆ $\sqrt{-1}$.

[29] لە پەرتوکەکەی (جۆرج گامۆف) بە ناوی " یەک، دوو، سێ ... ناکۆتا" کە (حوسێن حوسێنی) کردویەتی بە کوردی، باس لە کێشەیەک دەکات لە ژیانی ڕۆژانە کە چارەسەرەکەی (دۆزینەوەکەی) پەیوەندی بە ژمارە ئاویتەکانەوە هەیە.

بۆ ئەوەی بە شێوەی ئەندازەیی ژمارەیەکی ئاوێتە نیشان بدەین، ئەوە ڕاستەهێڵێک بەس نییە-یەک ڕەهەند، بەڵکو پێوستمان بە ڕووتەختە، لەکاتێکدا، بۆ نواندنی ژمارە ڕاستییەکان، تەنیا هێڵێکی ڕاستمان بەس بوو، هۆکاری ئەمەش ئەوەیە، کە ژمارە ئاوێتەکان لە دوو بەش (Component) پێک دێت، بەشی ڕاستی (Real part)، و بەشی خەیاڵی (Imaganry part)[30]. کە بەو شێوە دەنووسرێت:

$$x + iy$$

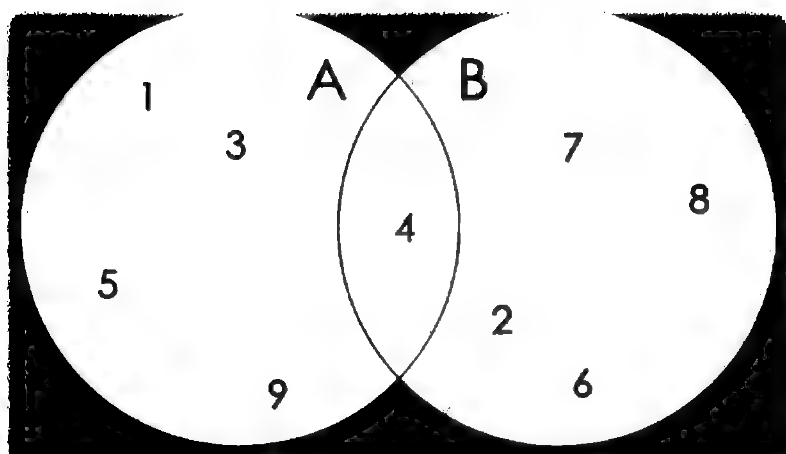
دەکرێت هەموو ژمارەیەکی ڕاستی وەک ژمارەیەکی ئاوێتە سەیر بکەین، ئەویش کاتێک بەشە خەیاڵییەکەی سفرە، واتە: $x + i0$ کاتێک x ژمارەیەکی ڕاستییە.

[30] چەمکی "ژمارەی ئاوێتە" کاتێک بەکاردێنین کە ژمارەکە بەشی "ڕاستی و خەیاڵی" هەبێت، وەک: $2 + 3i$. بەڵام چەمکی ژمارەی "ئاڵۆز یان خەیاڵی" کاتێک بەکاردێنین کە بەشی ڕاستی ژمارەکە سفر بێت، وەک: $3i$.

بەشی دووەم

کۆمەڵەکان

Sets



$A \cap B = \{4\}$

کۆمەڵەکان

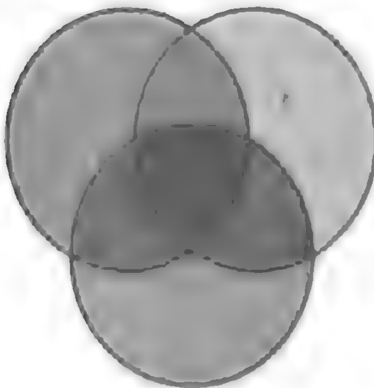
Sets

کۆمەڵە[31]، بە سانایی بریتییە لە کۆبوونەوەی شتانێک بەیەکەوە. ئەو شتانە کە لە ناو کۆمەڵەکەدان، دانەیان (Element) پێ دەوترێت. بیرۆکەی کۆمەڵە، بە یەکێک لە بابەتە هەرە بەپێز و گرنگەکانی سیمبولی-بیرکاری دادەنرێت، بەجۆرێک، زۆرێک لە بنچینە و تیۆرییە بیرکارییەکان، لەسەر ئەم بابەتە پایەکانی خۆیان بونیادناوە، تەنانەت سەرەکیترن لە ژمارەکان! کۆمەڵە لە ناویدا دەکرێت ناکۆتا (Infinite) یان کۆتادار (Finite) دانەی تێدا بێت، کە هەمیشە بە شێوەی داخراو ئاماژەی بۆ دەکرێت و دانەکانی ناو کۆمەڵەکە ئەگەر بینووسین دەخرێتە نێوان ئەو { } کەوانانە. ڕیزبەندی نووسینی دانەکان لە ناو ئەم کەوانانە، بایەخێکی وای نییە و خەسڵەتی کۆمەڵەکە و دانەکانی ناوی ناگۆڕێت و بەشێک نییە لە تایبەتمەندی کۆمەڵە، یان دووبارەی بوونەوەی دانەیەکیش کێشە نییە لە هەندێ دۆخدا. کۆمەڵەکان مومکینە دروستبکرێن لە کۆمەڵەکانی ترەوە. یەکێک لەو هۆکارانەی کە کۆمەڵەکان بە بابەتێکی بە نرخی دەزانین، لەبەر ئەوەیە گشتێتی دەپارێزێت و تیۆری لەسەر بینا دەکرێت، واتە خەت و خاڵی زۆرێک تیۆری دادەڕێژێت.

---

[31] لە بابەتێکی پێشوو باسی خێزانی ژمارەکانمان کرد. جیاوازی خێزان و کۆمەڵە ئەوەیە کە خێزانەکان ڕێسایەکیان هەیە بۆ دانەکانی ناوی، وەک کە خێزانی ژمارە جووتەکان و خێزانی ژمارە تاکەکان هەردووکیان لە ناو کۆمەڵەی ژمارە تەواوەکان بوونیان هەیە.

سەبارەت بە شتەکانی-دانە ناو کۆمەڵە، دەکرێت هەر شتێک بێت، ژمارە، ئەستارەکان، درەختەکان، ئاژەڵەکان... بەڵام بەگشتی پێکهاتەکانی ناو کۆمەڵە، پەیوەندیدارن بەیەکەوە. دەکرێت دانەکانی ناو کۆمەڵەکە یاسایەکیان هەبێت. سەرەرای ئەمەش، هەندێک جار، ناو لە کۆمەڵەکان دەندرێت و ناوزەد دەکرێن، وەک: کۆمەڵەکانی کانتۆر (Cantor set). تیۆری کۆمەڵەکان، پتر دەچێتە خانەی فەلسەفەوە و خزمەت و قازانجی توێژینەوەی فەلسەفە دەکات، بە تایبەتی لە پرۆسەی لێکۆڵینەوە و ئەنجامگیری و گەیشتنە مەبەستدا، جگە لەوەی پەیوەندییەکی توند و تۆڵی بە بابەتی چەمک و بریار (حکم) دانەوە هەیە.[32]



کۆمەڵەکان بە پیتی گەورە-کەپیتەڵی ئینگلیزی هێما دەکرێن. دانەکانی ناویشی بە پیتی بچوک-سمۆڵی ئینگلیزی هێما دەکرێت. زۆر جار رەمزێک-هێمایەکی تایبەتی بۆ دادەندرێت.

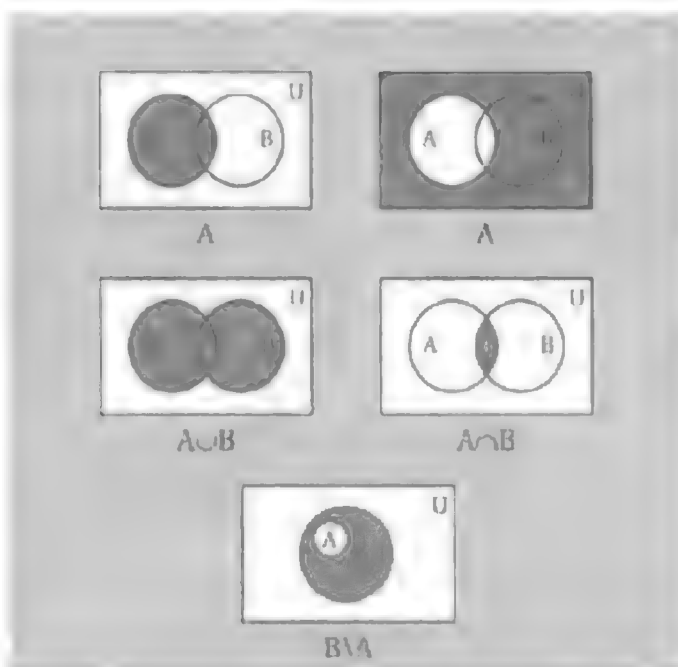
[32] لۆجیکی دوێنێ و ئەمرۆ. پ. د. حمید عزیز. ناوەندی ئاوێر 2016.

پێکبەستنەوەی کۆمەڵەکان

Combining sets

وادانــێ دوو کۆمەڵەمــان هەیە، بەهــۆی ئەو دوو کــۆمەڵەیەوە، دەتــوانین چەنــدین کــۆمەڵەی تــری هەمەچەشــن دروســت بکەیــن؛ بە بەکارهێنــانی کردارەکــانی تــایبەت بە کۆمەڵەکــان لەســەر ئەو دوو کــۆمەڵەیە. یەکەم کــردار هەمــانە، "یەکتربڕینــی دوو کــۆمەڵە" (Intersection). ئەگەر X و Y دوو کــۆمەڵە بــن، ئەوە یەکتربڕینــی ئەو دوو کــۆمەڵەیە بە زمــانی بیرکــاری بەو شــێوە دەنووســرێت: $X \cap Y$ کە دەکــاتە هەمــوو ئەو دانــانەی کە لە هەردوو کــــۆمەڵەکە دا هەیە، واتە دانە هاوبەشــــەکان. کردارێکــــی تــــر، ئەویــــش "یەککگــرتنە" (Union)، لە یەککگــرتن، هەردوو کــۆمەڵەکە تــێکەڵ بەیەک دەبــن و دەبــــن بە یەک کــــۆمەڵەی گەورە، کە بە زمــــانی بیرکــــاری بەم شــــێوە دەنووســرێت: $X \cup Y$. بــارێکی ترمــان هەیە لە تیــۆری کۆمەڵەکــان، ئەویــش پێــــی دەوتــــرێ: کــــۆمەڵەی بەتــــاڵ (Empty set)، کە ئەم کــــۆمەڵەیە ϕ یان { } هێمــا دەکرێــت، واتە هــیچ شــتێک لە نــاو کــۆمەڵەکە بــوونی نیــیە. چەمێکــی تــر هەیە پێــی دەوتــرێ: بەشــە-بــنە کــۆمەڵە (Subset)، بــنە کــۆمەڵە، ئەو کــۆمەڵەیە کە دانەکــانی لە کــۆمەڵەیەک وەرگیــراوە، دەشــێت بەشــێک لە دانەکــانی ئەو کــۆمەڵەی تێــدا بێــت، یــاخود گشــت دانەکــانی ئەو کــۆمەڵەی تێــدا بێــت. کــۆمەڵەی بەتــاڵ، بــنە کــۆمەڵەیە لە هەمــوو کــۆمەڵەیەک. چەمکێکــی ترمــــان هەیە پێــــی دەوتــــرێ کــــۆمەڵەی "تەواوکەر" (Complementary)، کــــۆمەڵەی تەواوکەر واتە ئەو دانــــانەی کە لەو کــــۆمەڵە نــــین، وەک: ئەگەر Y

مـــان هەبێـــت، ئەوە کـــۆمەڵەی تەواوکەر بە $\bar{Y}$ یـــان Y^c هێمـــا دەکرێـــت. ئەگەر Y بـــنە کـــۆمەڵە بێـــت لە X ، ئەوە پەیوەنـــدی تەواوکەری Y بەو شـــێوە دەنوســـرێت: X/Y کە دەکـــاتە کـــۆمەڵەی هەمـــوو ئەو دانـــانەی لە X هەیە بەڵام لە نـــاو Y نیـــیە. لەم وێـــنەی خـــوارەوە U دەبینـــین، U بـــریتییە لە : تێکـــرای جیهـــان (Universal set)، کە هەمـــوو شـــتەکان-دانەکـــان دەگرێتەخـــۆی. لەو وێـــنەی خـــوارەوە A و B بەیەکەوە تێکـــرای جیهـــان پێکدەهێنن.

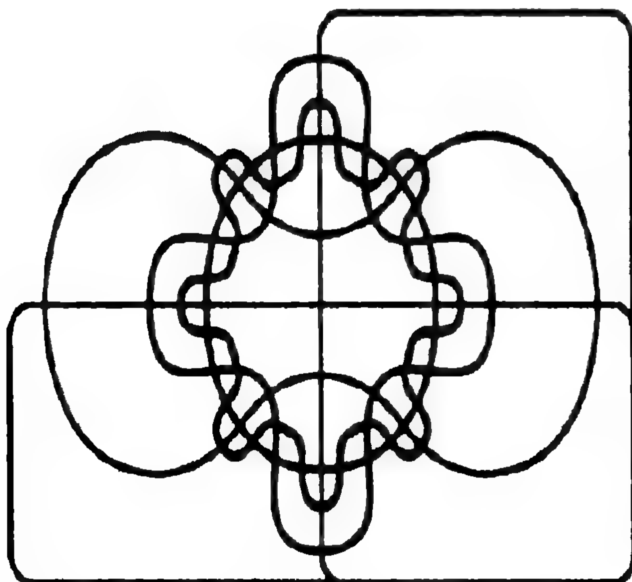


هێڵکارییەکانی ڤن

Venn diagrams

هێڵکارییەکانی ڤن، بەگشتی بریتین لە هێلکارییەک هەر وەک هێڵکارییەکانی تر، کە بەزۆری بەکاردێت بۆ وەسفکردنی پەیوەندییەکانی نێوان کۆمەڵەکان. لە سادەترین شێوەدا، بازنە-پۆپکە (Disk) بەکاردێت بۆ نواندنی هەر کۆمەڵەیەک، کە یەکتربڕینی پۆپکەکان، یەکتر بڕینی کۆمەڵەکان دەنوێنێت، وەک لە بابەتی پێشوو بینیمان. بەکارهێنانی هێلکاری لەو شێوە بۆ دەربڕینی پەیوەندییە جیاوازەکانی نێوان پێشنیازە فەلسەفییەکان یان کۆمەڵە جیاوازەکان بەکارهاتووە و بەکاردێت. ئەم بابەتە لە لایەن لۆجیکزان و فەیلەسوف 'جۆن ڤن' (John Venn) لە ساڵی 1880 بە فۆرمولە کرا.

(ڤن) خۆی ئامازەی پێیانداوە، هەروەک بازنە ئۆیلەرییەکان (Eulerian circles)..... . بەکارهێنانی هێلکاری ڤن بۆ سێ کۆمەڵە، ڕێگایەکی کلاسیکی هەیە بۆ نیشاندانی هەموو پەیوەندییە ڕێتێچووەکان. بەڵام بۆ زیاتر لە سێ کۆمەڵە، ئەوە ڕێکخستنی یەکتربڕینەکانی کۆمەڵەکان ئالۆز و سەخت دەبێت. ئەو هێلکارییەی خوارەوە، پەیوەندی نێوان شەش کۆمەڵەی جیاواز نیشاندەدات.



تاکە ڕێتێچوو بۆ نیشاندانی شەش کۆمەڵە بەهۆی هێڵکاری ڤن.

پارادۆکسی سەرتاشەکە

The barber paradox

پـارادۆکس، لە سـادەترین پێناسـەدا؛ بـریتییە لەو دەقەی کە خـۆی دژی خـۆی دەوەسـتێتەوە و، ئەنجـامەکەی لە ڕووی لـۆجیکییەوە دانپێـدانراو و جێگـای قبـوڵ نیـیە. لە سـاڵی (1901) بیرکـاریزان و لـۆجیکزان و فەیلەسـوف 'بێتراند ڕاسـڵ'[33]، ئەو پاردۆکسـەی بەکارهێنـا بـۆ ئەوەی هەنـدێ کەم و کوڕی لە تیۆری کۆمەڵە سەرەتاییەکان دەربخات.

پارادۆکسـەکە دەڵێـت: لە گونـدێک، هەمـوو پیاوەکـان دەبێـت خۆیـان سـەری خۆیـان بتاشـن، یـانیش دەبێـت سەرتاشـی (حەلاق-دەلاک) گونـدەکە سـەریان بتاشـێت. سەرتاشـی گونـدەکە بانگێشـەی ئەوە دەکـات کە؛ تەنیـا سـەری ئەو پیـاوانە دەتاشـێت کە خۆیـان سـەری خۆیـان ناتاشـن. باشـە کـێ سەری سەرتاشەکە دەتاشێت؟

پارادۆکسـەکە دووچـاری پرسـیارێکی جـدیمان دەکـاتەوە، ئەویـش ئەگەر سـەرنجی بـدەین؛ کـۆمەڵەیەک هەمـوو ئەو بـنە کـۆمەڵانەی تێـدایە کە خۆیـان وەک دانەیەک نـین. ئەو کـۆمەڵەیە دەبێـتە دانەیەک لە خـۆی (مەبەسـت لە سەرتاشـەکەیە)؟ چارەسـەری خێـرا ئەوە بـوو کە بـۆ نـاکۆکی

---

[33] بێرتراند ڕاسـڵ (1872-1970) فەیلەسـوف، لـۆجیکزان و بیرکـاریزانی بەریتـانی. یەکـێکە لە درەوشـاوەترین فەیلەسـوفەکانی فەلسـەفەی خۆرئـاوا، کە لە مـاوەی ژیـانی پتـر لە 45 پەرتـوک و چەنـدین وتـاری نووسـی. زیـاتر بە شـاکاری'بنەماکانی بیرکـاری' ناسـراوە. لە هەمان کاتدا، براوەی خەڵاتی 'نۆبڵ' لە بواری ئەدەبیات.

لەم شێوەیە، پێویستە تیۆری کۆمەڵە سنوردار بکەن بە زنجیرەیەک یاسا و بەڵگەنەویست، پاشان دروستکردنی پلە بەندیی کۆمەڵەکان، کە ئەمەش رێگەدەدات دانەکان بەکەونە کۆمەڵەی سەرووخۆیان کە لە پلە بەندییەکەدان، لەگەڵ ئەوەش، رژێمی بەڵگەنەویسی تیۆری کۆمەڵەکان چووە ژێر بارییەوە.

ئەگەر سەرتاشەکە سەری خۆی بتاشێت، ئەوە ئەو بانگێشەیەی خۆی کردبووی، درۆ دەردەچێت. ئەگەریش سەرتاشەکە سەری خۆی چاک نەکات، ئەوە بە پێی بانگێشەکە دەبێت سەری خۆی چابکات، بەڵام دیسان ئەگەر چاکی بکات، ئەوە بانگێشەکەی درۆ دەردەچێت... واتە پرۆسەکە لە نێوان چاکردن و چاکنەکردن دەمێنێتەوە و ئاکامی نییە.



Cardinality and countability

ژمارەی دانەکان و شیاوی ژماردن

ژمارەی دانەکانی (Cardinility) ناو کۆمەڵەیەکی کۆتادار (Finite) *A* بە شێوەی |A| دەنوسرێت، کە بریتییە لە ژمارەی دانەکانی ناو کۆمەڵەکە (دانەی دووبارە هەژمار نییە)، واتە کۆمەڵەیەکی وەک A چەند دانەی تێدایە. دوو کۆمەڵە ئەگەر هاتوو یەک بەرامبەر یەک بوون (one-to-one)، ئەوە پێیان دەوترێن "هەمان ژمارەی دانەیان هەیە" کاتێک بتواندرێت هەر دانەیەکی دوو کۆمەڵەکە بەجۆرێک جووتبکرێن، بە شێوەیەک کە: بۆ هەر دانەیەک لە کۆمەڵەی یەکەم، دانەیەک هەبێت لە کۆمەڵەی دووەم، کە پێکەوە دەست لەملانبن. کۆمەڵەی ژمێردارو-شیاوە ژماردن (Countable)[34] ئەو کۆمەڵانەن کە دانەکانی ناوی دەتوانین بەهۆی ژمارە سروشتییەکان ناوزەڕ بکەین. واتا دانەکانی ناو کۆمەڵەکە بە شێوەی خشتەیەک (list) بنووسین و بە ژمارە سروشتییەکان ناویان لێ بنێین، لەگەڵ ئەوەش، خشتەکە دەکرێت ناکۆتا بێت. بە بیرکاریانە، کۆمەڵەیەک؛ ژمێردراوە ئەگەر هاتوو توانیمان دانەکانی ناوی "یەک بەرامبەر یەک" لەگەڵ بەشێک لە کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکان بنووسین. ئەمەش هەندێ ئەنجامی سەمەرەمان دەداتێ، بۆ نمونە: دەکرێت بنە

[34] ئەم بابەتە لە تیۆری پێوان (Measure theory) گرنگی هەیە، لەگەڵ ئەوەش هەر کۆمەڵەیەک ژمێردراو بێت، ئەوە پێوانەی ئەو کۆمەڵەیە دەکاتە سفر، بۆ نمونە: پێوانەی کۆمەڵەی ژمارە ڕێژەییەکان دەکات سفر.

کۆمەڵەیەک لەگەڵ کۆمەڵەکە خۆی، هەمان ژمارەی دانەیان هەبێت، یان کۆمەڵەی هەموو ژمارە جووتەکان هەمان ژمارەی دانەیان-قەبارە هەیە لەگەڵ کۆمەڵەی ژمارە تاکەکان، ئەویش هەمان ژمارەی دانە-قەبارەی هەیە لەگەڵ کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکان. هەموو ئەمانە پیان دەوترێت کۆمەڵەی ناکۆتای ژمێردراو (Infinite countable set)[35] . بە نمونەیەک ئەمە زیاتر ڕۆشن دەکەینەوە: وادانێ ناکۆتا پارەی تاک هەزاریمان هەیە، لەبەر ئەوەی هەر تاک هەزارییەک ژمارەیەکی تایبەت بە خۆی هەیە و هیچ دوو تاک هەزاری هەمان ژمارەیان نییە، ئەوە دەتوانین ئەو تاک هەزارییانە بژمێرین یان سەفت-ڕیز بکەینەوە بە هۆی ئەو ژمارەی کە لەسەر تاک هەزارییەکان هەیە، لە کاتێک ئەگەر بچوکترین ژمارەی سەر تاک هەزارییەک 5567 بێت، ئەوە ئێمە لەگەڵ 1 دەبەستینەوە، پاشان ئەگەر دوای ئەم ژمارەیە، بچوکترین ژمارە 5569 بێت ئەوە بە 2 دەیبەستینەوە... . ئەو نووسینە لێرە بە مانای بەهای ڕووت (Absulte value) نایەت، ئەگەر لە نێوان ئەم هێمایە | | پیتی کەپیتەڵ یان کۆمەڵە نووسرا، ئەوە مەبەست لێی زانینی ژمارەی دانەکانی ناو کۆمەڵەکەیە.

$|A|$

[35] کاتێک دوو کۆمەڵەی ناکۆتا لەگەڵ یەکتر بەراورد دەکەین، شتی سەیر دێتە ئاراوە، وەک: کام ناکۆتا گەورەترە؛ ناکۆتای کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکان یان ژمارە جووتەکان؟ بۆیە لە پرسیارێکی لەم شێوە، ئەو وتە فەلسەفییە باوەی کە دەیگوت: 'هەمەکی لە هەندەکی گەورەترە' بە هەڵەخرایەوە!

هوتێلەکەی هیلبێرت

Hilbert's hotel

هوتێلەکەی هیلبێرت[36]، بیرۆکەیەکی جوان و ناوازەیە، کە لە لایەن هیلبێرت خۆی داهێندرا سەبارەت بە "کۆمەڵە ژمێردراوە ناکۆتاکان". بیرۆکەکە وا پیشان دەکات کە ئەگەر هوتێلێکمان هەبێت، ئەو هوتێلە ناکۆتا ژووری تێدا بێت (هوتێلکە کۆمەڵەکە دەنوێنێت، وە ژوورەکانی ناوی؛ دانەکانی ناو کۆمەڵەکە دەنوێنێت). ژوورەکانی ناو کۆمەڵەکە ناکۆتان، هەر ژوورەک لە ژمارە یەکەوە ژمارە (Lable) کراوە 1،2،3،... بەم شێوە، کە گشت ژوورەکان میوانی تێدایە، پاشان میوانێکی نوێ دێت بۆ هۆتێلەکە و داوای ژوورێک دەکات، خاوەن هوتێلەکەش داوا لە کەسی ژووری ژمارە 1 دەکات بچێتە ژووری ژمارە 2، وە کەسی ژووری ژمارە 2 بچێتە ژووری ژمارە 3، بەم شێوە بۆ ئەوانی تریش،

[36] دەیڤید هیلبێرت (1862 – 1943) ماتماتیکناسی گەورەی ئەڵمانی و کەسایەتیەکی سەیر. ڕابەری ڕێبازی فەلسەفی فۆرمالیزم لە ماتماتیکدا کە دەڵێت: ماتماتیک تەنها زادەی ئەقڵی مرۆڤە و هیچی تر، بە پێچەوانەی قوتابخانەی ئەفلاتونی (یان ڕیالیزم) کە دەڵێت ماتماتیک بونی سەربەخۆی خۆی لە دەرەوەی مرۆ هەیە. یەکێکە لە پێشڕەوانی نوێکردنەوەی جیۆمەتری. چەندەها بەدیهی دارشت بۆ ئەوەی بیسەلمێنێت کە سیستەمێکی فۆرمالیستیکی لە ماتماتیکدا هەیە، کە بە کورتی دەڵێت لە سیستەمی بەدیهی سەرەتایی ماتماتیکدا دەشێت ڕاستی ئەم بەدیهیانە بسەلمێنرێن. بەلام لە سالی 1931 ماتماتیکناسی تەمەن بیست و پێنج سال، کورت گۆدێل توانی سیستەمەکەی هەڵوەشێنێت و سەلماندی کە هەندێک بەدیهی لە ماتماتیکدا هەن کە هەرگیز ناتوانرێت بسەلمێنرێن کە هەڵەن یان ناتوانرێت بسەلمێنرێن کە ڕاست نین. هیلبێرت بە یەکێک لە ماتماتیکناسە چالاکەکانی چەمکی ناکۆتا هەژمارد دەکرێت و زۆر بە پەرۆشەوە بانگەوازی بۆ کردووە و بەرگری لە کانتور کردووە. (شێرکۆ ڕەشید قادر)

ئیتر لە ئەنجام ژووری ژمارە 1 بۆ میوانە تازەکە چۆڵ دەبێت و تیدا نیشتە جێ دەبێت. ئەو پرۆسەی گواستنەوەیە بە بیرکارییانە بەو شێوە دەردەبڕێت: کەسی ژووری N دەچێتە ژووری $N+1$. ئەم بیرۆکەی هیلبێرت ئەوە دەردەخات کە بە زیاد کردنی دانەیەک بۆ کۆمەڵەیەکی ژمێردراو، هەر بە ژمێردراوی دەمێنێتەوە، بەلام دەشبێت ئەم کۆمەڵەیە جیاواز بێت لەگەڵ کۆمەڵەی پێش میوانە نوێیەکە. ئەم بیرۆکەیەی هیلبێرت[37] تا ئێستاش مشت و مڕی زۆر لەسەرە، کە دەرگای چەندین پرسیاری لە ڕووی هزرمەندان و بیرکاریزانان کردەوە.



[37] ئەم بیرۆکەیەی دەیڤید هیلبێرت نیشانی دا کە دوو کۆمەڵەی ناکۆتا، لەگەڵ ئەوەی بە ڕووکار وادەردەکەوێت کە جیاوازن، بەلام هاوتای یەکترن. ئەمەش بیرۆکەیەک بوو کە پیشانی دا دەکرێت: هەندەکی یەکسان بێت بە هەمەکی!

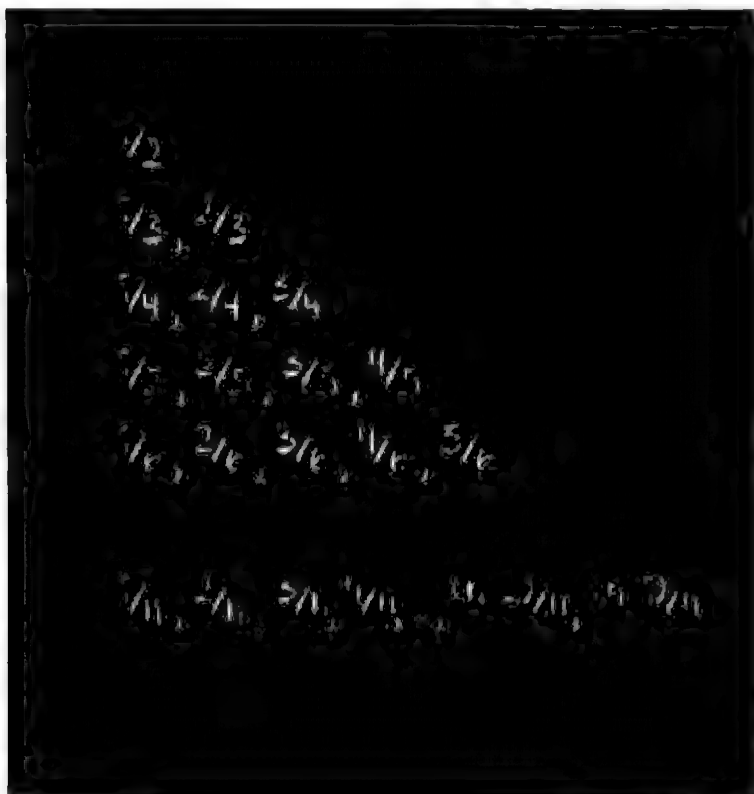
ژماردنی ژمارە ڕێژەییەکان

Counting rational numbers

لەکاتێکــدا کە هەمــوو کــۆمەڵە زۆر گەورەکــان ژمێــردراو نــین، بەڵام کـــــۆمەڵەی زۆر گەورەش هەن کە ژمێـــــردراون. مەبەســـــتی ئـــــێمەش لەو کـــــۆمەڵەیە؛ بـــــریتییە لە کـــــۆمەڵەی ژمـــــارە ڕێژەییەکـــــان (Rational numbers). ژمـــارە ڕێژەییەکـــان ئەو ژمـــارانەن کە لە ڕێـــژەی نێـــوان دوو ژمارە دروست دەبن $\frac{a}{b}$ کاتێک $(b \neq 0)$.

دەتــوانین ئەم ڕاســتییە بســەلمێنین تەنیــا بە وردبوونەوەمــان لە ژمــارە **ڕێژەییەکــانی نێــوان ســفر و یەک**. ئەگەر ژمــارە ڕێژەییەکــانی نێــوان ســفر و یەک ژمێــردراو بێــت، ئەوە دەبێــت توانــای ئەوەمــان هەبێــت کە لە بچــوکەوە بــۆ گەورە ڕیزیــان بکەیــن. نابێــت ئەو ڕاســتییە لە بیــر بکەیــن، کە لە نێــوان هەردوو ژمــارەیەکی ڕێژەیــی، ژمــارەیەکی تــری ڕێژەیــی هەیە (وەک چــۆن لە نێــوان هەر دوو ئەســتێرەیەک، ئەســتێرەیەکی تــر هەیە)، بــۆیە ئــێمە نــاتوانین تەنـــــانەن یەکەم و دووەم ژمـــــارەی ئەو خشـــــتەیە بنووســـــین! بەڵام پرســـــیارەکە ئەوەیە، بە چ ڕێگـــــایەک ئەتـــــوانین ئەمە بکەیـــــن؟ لە کاتێـــــک کە دەڵـــێن ئەو کـــۆمەڵەیە ژمێـــردراوە؟ یەکێـــک لە ڕێگـــا چارەکـــان ئەوەیە ئەو ژمــارانە ڕیــز بکەیــن بە پێــی ژێرەکەیــان (Divisor)، پاشــان بە پێــی ســەرەی (Divided) کەرتەکـــان. لەگەڵ ئەوەش، هەنـــدێ بـــاری دووبـــارە دروســـت دەبێــت لەم نزیکبــوونەوەیە، بەڵام هەر ژمــارەیەکی ڕێژەیــی لە نێــوان ســفر و

یەک، مــــومکینە یەک جـــار دەرکەوێـــت لەم خشـــتەیە. وەک لەم خـــوارەوە چۆنییەتی ڕیزکردنی ژمارەکان خراوەتە ڕوو.



لە کــۆمەڵە ژمێردراوەکـــان، شـــتێکی ســـەرنج ڕاکـــێش هەیە، ئەویـــش ئەوەیە کە هەر کــــــــۆمەڵەیەک ژمێـــــــردراو بێـــــــت (Countable)، ئەوە پێوانەکەی دەکات سفر (Measure of zero).

کۆمەڵە چڕەکان

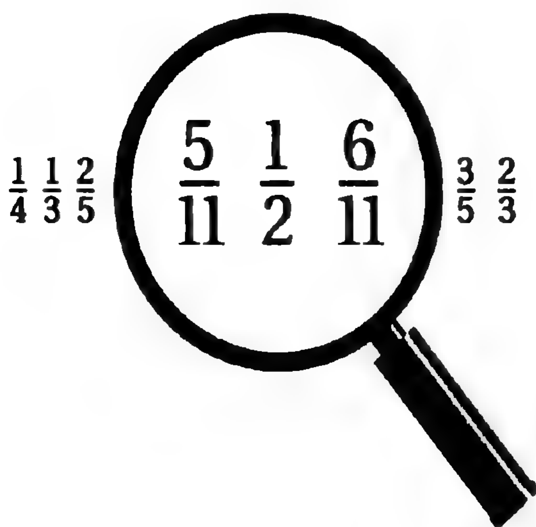
Dense sets

چڕێتی-خەستی، یەکێک لەو تایبەتمەندییانەی کە تێدا وەسفی پەیوەندی نێوان کۆمەڵەیەک و بنە کۆمەڵەکانی دەکات، یانیش وەسفی چڕی دانەکانی ناو کۆمەڵەیەک دەکات، ئەمەش کاتێک تێگەیشتنێک هەیە لە دووری دانەکانی کۆمەڵەکە. لە بابەتەکانی پێشوو، باسێکمان لەوە کرد کە هەندێ کۆمەڵە دانەکانی؛ توانای ژماردنی هەیە و هەندێک نییەتی، لەگەڵ ئەوەش، لە هەردوو باردا کۆمەڵەکان ناکۆتان. لێرە مەبەستمان لەچڕی-خەستی کۆمەڵەکان ئەوەیە: کۆمەڵەیەکی ناکۆتای وەک کۆمەڵەی ژمارە ڕێژەییەکان (Rational numbers) کە کۆمەڵەیەکی زۆر گەورەیە و لە هەمان کات کۆمەڵەیەکی زۆر چڕ و پڕە! لە کاتێک کە ئەم کۆمەڵەیە بەشێکە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان (Real numbers).

کۆمەڵەیەک A پێی دەوترێن چڕ لە کۆمەڵەیەکی تر B، ئەگەر کۆمەڵەی A لە کۆمەڵەی B بنە بێت و، هەر دانەیەک لە کۆمەڵەکە A لە کۆمەڵەکە گەورەکەش B دانە بێت وەیان زۆر نزیک بێت لە یەکێکیان، بۆ هەر دانەیەکی لە کۆمەڵە گەورەکە B، دەتوانین دوورییەکی (مەودایەکی زۆر بچوک) دەست نیشان بکەین کە لە سفر گەورەتر بێت، پاشان دۆزینەوەی دانەیەک لە کۆمەڵەکەی یەکەم A بە پێی ئەو دوورییەی لە دانەکە.

بـۆ سـەلماندنی ئەوەی کە کـۆمەڵەی ژمـارە ڕێژەییەکـان چـڕ و پـڕە لە نـاو کـۆمەڵەی ژمـارە ڕاسـتییەکان. ئێسـتا دووریيەکـی $d > 0$ دەسـت نیشـان دەکەیـن لەگەڵ ژمـارەیەکی ڕاسـتی وەک y، بـۆیە ئێسـتا دەتـوانین بیسەلمێنن کە هەردەم ژمارەیەکی ڕێژەیی x هەیە لە نێوان y و d دا.

جیـا لەمەش، هەر بەو بیـرۆکەیە دەتـوانین بیسـەلمێنین کە لە نێـوان هەر دووژمـارەیەکی ڕێژەیـی، هەر چەنـد زۆر لێـک نـزیکیش بـن، ئەوە ناکۆتـا ژمارەی تر لە نێوانیاندا هەیە[38].



[38] قوتابیـانی بەشـەکانی بیرکـاری ئەم بـابەتە لە وانەی (Mathematical Analysis - شیکردنەوەی بیرکارییانە) دەخوێنن.

کۆمەڵە نەژمێردراوەکان

Uncountable sets

کۆمەڵە دانەی نەژمێردراو-نەژمێردراوەکان ئەو کۆمەڵە ناکۆتانان کە لە توانادا نییە دانەکانی ناوی ڕێکبخرێن بە شێوەکی ڕێک. ئەم بابەتەش ئەوە دەگەیەنێت کە دوو جۆر لە کۆمەڵەی ناکۆتامان هەیە، ئەوانیش کۆمەڵەیەک کە ژمێردراون و کۆمەڵەیەک کە **نەژمێردراون.** لە هەردوو جۆر، دیسانەوە چەندین جۆری جیاوازمان هەنە. چۆن دەتوانین ئەو بسەلمێنین کە کۆمەڵەیەک نەژمێردراوە (Uncountable)؟ لە ساڵی 1891 بیرکاریزانی ئەڵمانی "جۆن کانتۆر"[39] بە هۆی شێواز-میتۆدی دژەیەک، سەلماندی کە **ژمارە راستییەکانی نێوان سفر و یەک نەژمێردراوە.** ئەگەر ژمێرداروو بێت، ئەوە وا دادەنێین کە ناکۆتایە، بەڵام لە خشتەیەکی (List)ی ژمێردراو.

---

[39] جۆرج کانتور(1845 – 1918) ماتماتیکناسی گەورەی ئەڵمانی کە تیۆری سێتی دۆزییەوە و توانی مانایەک بە پرسی ناکۆتا لە ماتماتیکدا و بە تایبەت چەمکی ژمارە پەیژەییەکان (transfinite numbers) ببەخشێت کە زۆربەی ماتماتیکناسانی دوای خۆی کوک بوون لەسەری. هەروەها توانی ناکۆتا بکاتە چەند پۆلێک، ئەوانەی کە دەژمێردرین و ئەوانەی کە نازمێردرین. ئەو ناکۆتایەنەی لە ناکۆتایەکی تر گەورەترن. سەرەتا چووە زانکۆی بەرلین و لەوێ لە ژێر سەرپەرشتی لیۆنارد کرۆنیکەر کەوتە خوێندنی تیۆری ژمارەیی و دوایی زۆر بە سەختی ڕکابەری کرد. لای کانتور " لە ماتماتیکدا هونەری پرسیارکردن بەهادارترە لە شیکارکردنی پرسیارەکان." ئەم پیاوە مەزنە، بە داخەوە هیچ ماتماتیکناسێک نە ئامادە بو یارمەتی بدات و نە باوەری پێ بکات، هەر بۆیەش پرسی ناکۆتا و تیۆری سێتەکانی بردە لای تیولۆژیستەکان و هەستیکرد کە ئەوان زیاتر لێی تێدەگەن. (شێرکۆ ڕەشید قادر).

بـــۆیە ئەگەر کـــۆمەڵەیەک، ناکۆتـــا بێـــت و ژمێـــردراو بێـــت، ئەوە بەو شێوەی خوارەوە دەتواندرێت دانەکانی بنووسرێت:

$0. a1, a2, a3, a4, \ldots$

کاتێـک هەر یەک لە a_k ژمـــارەیەکی سروشـــتییە لە نێـوان سـفر بـۆ 9. کـــانتۆر بەرپەرچـــی ئەوەی دەســـتەواژەیەی ســـەرەوەی دایەوە، کاتێـــک پیشـــانی دا کە هەمیشـــە دەتـــوانین ژمـــارەیەکی راســـتی لە نێـــوان "ســـفر و یەک" بدۆزینەوە کە ئەو ژمارەیە ناکەوێتە ناو خشتەکە (list).

$$
\begin{array}{lcc}
\mathbf{N} & \leftrightarrow & \textit{reals in } (0,1) \\
1 & \leftrightarrow & .835987\ldots \\
2 & \leftrightarrow & .250000\ldots \\
3 & \leftrightarrow & .559423\ldots \\
4 & \leftrightarrow & .500000\ldots \\
5 & \leftrightarrow & .728532\ldots \\
6 & \leftrightarrow & .845312\ldots \\
\vdots & & \vdots \\
n & \leftrightarrow & .r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 \ldots r_n \ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

باشــــە ئەمە چــۆن؟! ئەگەر بێـــت و ژمــــارەیەکی دەیـــی بنووســـــین بە شـێوەیەک کە ژمـارەی یەکەمی جیـاواز بێـت لەگەڵ ژمـارەی یەکەمـی خشـتە، وە ژمــــارەی دووەمـــی کەرتەکە جیـــاواز بێـــت لە ژمـــارەی دووەمـــی کەرتـــی خشـــــتەکە،... بەم شـــێوە دەگەیـــنە ژمــــارەیەک کە لەو خشـــتەیە نیـــیە کە گریمانمان کردووە.

بیـــرۆکەکەی هێڵبێـــرت ئەوەیە: لەگەڵ نـــاوزەرکردنی ژمـــارە ڕێژەییەکـــان بە ژمــــارە سروشـــــتییەکان، ئەوە ژمـــــارە سروشــــتییەکە چەنـــد بێـــت، ئەوە دەچێـــت کـــار لەو خـــانەیە (دەیـــیەکە) دەکـــات بە جۆرێـــک کە جیـــاواز بێـت لە پـــێگەی ئەو کەرتە لە خشـــتەکە، کە لە ئەنجـــام ژمـــارەیەک دروســـت دەبێـــت نـــــاکەوێتە ئەو خشــــتەیەی کە گریمــــانی کـــــردووە. ئەمەش واتـــــا ژمـــــارە ڕاستییەکانی نێوان سفر و یەک نەژمێردراوە.

کۆمەڵەکانی کانتۆر

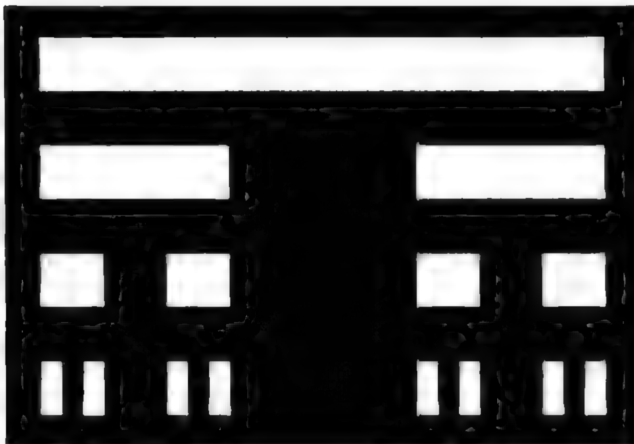
Cantor sets

کۆمەڵەکانی کانتۆر، بریتین لە سیما دیارەکانی شتانێک کە ناسراوە بە **لەیەکبووەکان** (Fractals)[40]. ئەم بیرۆکەیە لە لایەن جۆرج کانتۆر گەشەی پێدرا، بیرۆکەکە پیشانی دەدات کە ماوەیەکی (Interval) سنووردار لە هێڵی ژمارەکان، کۆمەڵەیەکن کە نازمێردرێن (Uncountable). بەلام پرسیارەکە ئەوەیە: بۆ هەموو کۆمەڵە نەژمێردراوەکان، ئەم شتە راستە؟ واتە لە هەموو کۆمەڵە نەژمێردراوەکان ئەم ماوە هێڵە (Line interval) هەیە؟ بۆیە کانتۆر پیشانی دا مومکینە کە کۆمەڵەیەکی نەژمێردراو دروستبکەین کە هیچ ماوە هێڵێکی تێدا نەبێت. کۆمەڵەکانی کانتۆر، کۆمەڵەیەکن تا رادەیەک ئاڵۆزن، بەجۆرێک پێکهاتەکەیان لەسەر پێوەری بچوک بۆ بچوکتر دەپوکێتەوە. یەکێک لە نموونەکانی کۆمەڵەکانی کانتۆر، پێی دەوترێت سێیەکی ناوەراستی کۆمەڵەی کانتۆر (Middle third Cantor set). ماوە کۆمەڵەیەکە، کە لە سێ بەش، بەشی ناوەراستەکەی لادەبرێت، وەک لە وێنەکەدا دیارە. ئەم

---

[40] لەیەکبووەکان (فراکتال) پێکهاتەیەکی ئەندازەییە، کە لە گەورەکردنەوە و دووبارەکردنەوەی شێوە ئەندازەییەکانی لێکچووی شێوە بنەرەتییەکە پەیدا دەبێت. بە دەستەواژەیەکی تر، فراکتال بە پێکهاتەیەک دەوترێت کە هەر بەشێکی هاوشێوەی شێوە گشتییەکەیە. فراکتال لە دوور و لە نزیکەوە یەکسان دەبینرێت، بەم تایبەتمەندییەی پێی دەوترێت: لەخۆچوویی (self-similar). فراکتالەکان یەکێک لە ئامرازە گرینگەکانی گرافیکی کۆمپیوتەر. وشەی فراکتال لە ساڵی 1976 لەلایەن ماتماتیکزان "بینۆیت ماندێلبرۆت" هاتە ناو دونیای بیرکارییەوە.

کـارەش لە هەنگـاوی یەکەم، دوو مـاوەی ترمـان دەسـت دەکەوێـت. بـۆیە لە قۆنـاغی n دا، 2n ماوەمـان دەبێـت، کە هەر یەکەیـان بە درێـژی $\left(\frac{1}{3^n}\right)$، وە سـەرجەمی درێژییەکـانی $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. کاتێـک n لە ناکۆتـا نزیـک دەکەینەوە، دیـارە ئەمەش بە نزیکەیـی دەبێـتەوە بە سـفر! ئەمەش هەوڵ و تەقەلای دەوێـت بـۆ ئەوەی پیشـان بـدرێت کە بەڕاسـتی شـتێک هەیە کە بەجـێ مـاوە لە سـنورە ناکۆتاکـان لەم بـنە دابەشـکردندا؛ بـۆ سـەلماندنی ئەوەی کە کـۆمەڵەک نەژمێردراوە.



لەم وێـنەی سـەرەوە، هـێڵەکەی یەکەم کـۆمەڵەکە دەنوێنێـت. ئەگەر ئەو کـۆمەڵەیە بکەیـنە سـێ بەش، بەشـی ناوەڕاسـت لابەریـن، دوو بەش دەمێنێـتەوە. دووبـارە ئەو دوو بەشـە هەر یەکەیـان دەکەیـنە سـێ بەش، بەشی ناوەڕاست لابەرین... بەم شێوە.

کێشەکانی هیلبێرت

Hilbert's problems

کێشـــەکانی هیلبێـــرت، بـــریتییە لە 23 پرســـیار کە لە لایەن "دەیڤـــد هیلبێـــرتەوە" ئاراســـتە کـــراو لە ســـاڵی 1900 لە کـــۆنگرەی بیرکـــاری لە پـاریس. هیلبێـرت پێـی وابـوو، کە ئەم کێشـانە کلیلـی پێشـکەوتنی بیرکـارین لە سـەدەی بیسـتەم. لەکۆنـدا، 300 سـاڵ لەمەو بەر، سیسـتەمی بەڵگەنەویسـتی لە لایەن ئیقلیـدەوە جێبەجـێ کـرا لە زۆر بـواردا. بیرکاریزانەکـانیش هەسـتان بە پێشخســـتن و جێگیرکردنـــی بەڵگەنەویســـتەکان (Axioms) بە پێـــی ئەو بـــوارەی کـــاری تێـــدا دەکەن. لە ئەنـــدازەدا، هێـــڵ، خـــاڵ و چەمـــاوە و تایبەتمەنـــدییەکانیان، پاشـــان گەشـــەپێدانی ئەو بابەتـــانە بەهـــۆی ئەو بەڵگەنەویســـتانەوە بە پشـــت بەســـتن بە لۆجیـــک، دواتـــر بونیاتنـــانی بیردۆزەکـــان و ســـەلماندنیان. هەنـــدێک لەو کێشـــانەی هیلبێـــرت، پەیوەنـــدی بە میتـــۆدی بەڵگەنەویســـتی و درێژکـــردنەوەی (زیـــادکردن) بەڵگەنەویســـتەکان هەیە، واتـا هیلبێـرت و شـوێنکەوتوانی پێـان وابـوو لە ڕێـگەی فۆرمـولەکردنی بەڵگەنەیســـتەکان، دەتـــوانین بـــگەن بە چارەســـەری کێشـــەکان، وە هەمـــوو کێشـــەیەکی ماتمـــاتیکی، بەڵام ئەو کـــارە درێـــژەی نەبـــرد و بەهـــۆی کـــارەکەی کـــۆرت گۆدێـــل[41] بە شـــێوەیەکی چـــاوەڕوان نەکـــراو، بەربەســـتێکی خســـتە

[41] لـــۆجیکزان و بیرکـــاریزانی ئەمەریکـــی بـــوو، هەنـــدێک لە دەرئەنجـــامە ســـەرەکییەکانی بیرکـــاری ســـەلماندن و هەر بە نـــاوی خـــۆیەوە کـــرا. ســـەرەڕای ئەمـــانەش، پێشـــانی دا کە ئەو هەوڵ و تەقەلایەی بەرنـــامەکەی دەیڤیـــد و هەنـــدێک لە لۆجیکباوەڕەکان خەریکینە، هیچ دەستەکەوتێکی نییە و هەوڵێکی نەزۆکانەیە.

بەردەم هیلبێرت و دەستەکەی، چونکە کارەگەی گۆدیل، جیهان بینینی ئێمەی سەبارەت بە تیۆری بەڵگەنەویستی تەواو گۆڕی. هەر بۆیە تا هەنووکەش چەندین کێشەی بیرکاری هەن کە هەر بە چارەسەرنەکراوی ماوەتەوە.

کورت گۆدیل؛ لە گۆڕنەری پێشبینییەکانی 'دەیڤید هیلبێرت و بێرتراند راسل'(ئوسامە تحسین)

'رام وایە مادام کارەکەی 'گۆدیل' چارەسەری چەندین پرسی یەکلانەکراوەی ماتماتیکی تا هەنووکە درێژکردەوە، وە بگرە هیوای چارەسەریشی لە هەندێکیان هەر بڕی، ئەوە دەبێت دووبارە بە دڵنیاییەکانماندا بچینەوە لەوانەی بەر لە 'گۆدیل' پێی گەیشتووین...'چونکە بەگشتی تیۆری لە 'بیرکاری پەتی' وایە؛ گەر شتێک سەلمێندار، ئیتر دەرگای مشت و مڕی لەسەر دادەخرێت. چی دەبێت دووبارە لە هەموو یان لە بەشێکی ئەو دەرگایانە بدەینەوە؟ بۆچی 'هیلبێرت' پێی وابوو جیهان بینینی ئێمە بۆ ماتماتیک لە سەدەی 20م دەگۆڕێت ئەگەر هاتوو هەندێک لە کێشەکانی یەکلابکرێتەوە؟ پێشبینی 'هیلبێرت' دەبێت چی بووبێت؟ دەشێت پێشبینی 'هیلبێرت' هەمووی لە ڕێگەی گەشەسەندنی سیستەمێکی بەڵگەنەویستی بێت بۆ چارەسەری کێشەکان، وای پێشبینی کرد بوو: کە سیستەمێکی وا پێکەوە بنێت (Combine) لە بەڵگەنەویست، کە وەک عەسای سیحری، چی ویست پێی وەڵام بداتەوە! مانای قسەکەی 'هیلبێرت' لە گرنگی یەکلاکردنەوەی

پرسەکان نەبووە، بەڵکو مەبەستی ئەو سیستەمە بووە کە پێی دەگەین و ئەو پرسانەی پێ وەڵام دەدەینەوە. لەگەڵ ئەوەش، بۆمان هەیە گومان لە کارەکەی گۆدیلیش بکەین[42]! ئەو 23 کێشەیەی هیلبێرت هەندێکیان شیکارکراون و هەندێکی تا ئێستا بە شیکارنەکراوی ماونەتەوە.

"مێژوو، ڕێچکەی پێشکەوتنی (دابڕان) زانستمان بۆ ڕووشندەکاتەوە. وەک دەزانین، کە لە هەر قۆناخ و چەرخێک، چەندین کێشە هەن، ئەو کێشانەش لە چەرخی دوای خۆیان یان چارەسەر دەکرێت، یان وەک شتێکی بێ بەها بەلاوەدەنرێن و کێشەی تازە شوێنیان دەگرنەوە" (دەیڤید هیلبێرت)



[42] وەرگێر.

بیردۆزی ناسەقامگیری گۆدێل

Gödel's incompleteness theorems

کـارەکەی گۆدێـل لە سـالّی 1930 سـنورێکی پـۆلاینی خسـتە بەردەم بیرکاریزانەکـان، کە ئەویـش ئەوە بـوو: ئـێمە دەتـوانین چیـی بـزانین و چیـی نەزانـین. هەر ئەوەش بـوو خەونەکەی هیلبێرتـی لەگۆڕنـا کە بە هەمـان شـێوەی "سـتیف هۆکینـک" دەیوسـت ڕژێمێـک-سیسـتەمێک بـۆ ماتماتیـک بـدۆزێتەوە و بتوانێـت وەلامـی هەمـوو ئەو کێشـانە بـداتەوە کە بەچارەسـەرنەکراوی لەبەردەمـان مـاوەتەوە، یـاخود ئەو کێشـانەی ڕوومـان تێـدەکەن، سیسـتەمێک کە لە کۆمەڵێـک بەڵگەنەویسـت پێکهاتبێـت و وەلامـی ورد و درشـتی کێشـە ماتماتیکییەکـان بـداتەوە. سیسـتەمێک کە دژەیەک لە بەرامـبەر هـیچ مۆدلێـک بەرامـبەر بە هـیچ مۆدلێـک بـۆ هەمـان سیسـتەمەکە دروسـت نەکـات، ئەوەبـوو گۆدێـل هـات وتـی توانـای ئـێمە سـنوردراوە کە زۆر شـت هەیە نـاتوانین بـزانین ڕاسـتە یـان هەڵەیە، بە واتـایەکی تـر، توانـای سەلماندنی هەندێ دەقی ماتماتیکیمان نییە.

دوای کـارەکەی گۆدێـل، بیرکاریزانـان سـەرگەرمی ئەوە بـوون کە ئەو دەقـانەی ناتوانـدرێت بسـەلمێندرێت، وەک بەڵگەنەویسـتێک بـۆ سیسـتەمەکەی زیـاد بکەیـن، بەلام دواتـر هەمـان کێشـە ڕووبەڕووی سیسـتەمەکە دەبێـتەوە، دووبـارە بە پێـی کـارەکەی گۆدێـل، تووشـی چەنـد دەقێـک دەبـین کە دیسـانەوە توانـای ئەومـان نیـیە بیانسـەلمێنین. بـۆیە هەزمکردنـی ئەوەی کە دەقێـک بـوونی ڕاسـتی لـێ بێـت، بەلام سـەلماندنێک

نەبێت بۆی، ئەستەمە. بۆیە کارەکەی گۆدل تێگەیشتنی زیاتری بە ئێمە بەخشی لە نێوان سەلمێندراو و ڕاستی. دواتر هەر لەم سۆنگەیەوە، ئەی خودی بەڵگەنەویستەکان چین؟ کە ئەمان دەقێکن هەر سەرەتاوە دەڵێن ئەمانە خۆرسک ڕاستن و پێویستیان بە سەلماندن نییە. بۆچی لەسەر کۆمەڵێک بەڵگەنەویست، سیستەمێک یاخود پێناسەیەک دادەمەزرێت و بگرە ڕەنگە لە ڕێگەی چەند چەمک و دەقێکی کورت سیستەمێکی ئێجگار گەورە پێکدێنن، وەک نمونەی بەڵگەنەویستەکانی تۆپۆلۆجی.

بۆ وەڵامی ئەم جۆرە پرسیارانە، شتێک لە دوورەوە چاودێری هەنگاو بە هەنگاوی هەموو شتێک دەکات لە هەر زانستێک، ئەویش "ئەپستمۆلۆژییە" واتا تیۆری زانین. چونکە گەر لە چەمکی هەر دەقێکی نێو ماتماتیک وردبینەوە، دەبینین مەعریفیەک هەیە هەموو چەمکەکان بەیەکەوە دەبەستێتەوە و سەر و کلکی هەموو ڕووداوەکانی ناو سیستەمەکە لە خۆ دەگرێت و دژەیەکی هیچ چەمکێکی تر نابێت لە ناو هەمان سیستەم. "کانت" لە هەمبەر ئەم پرسە بەردەوام جەختی لەسەر ئەوە دەکردەوە کە: "ئێمە پێوستمان بە ڕەخنەگرتن لە ئەقڵ نییە لە بابەتێکی وەک ماتماتیکیش! لە بەرئەوەی پرنسیپەکان ڕاستەوخۆ بەچاو لە نێو حەدس وێنا دەکرێن". بۆیە خودی سیستەمێک یان هێزی سیستەمێک، لە ڕوونی و یەکگرتنەوەی چەمەکانەوە سەرچاوە دەگرێت دواتر هەموو چەمکەکان بەیەکەوە دەبنە بونیادێکی (ئەبستراکت) کە دواتر کۆمەڵێک تیۆر پێکدێنن.

گەر بـاس لە نمـونەیەک بکەیـن، وەک ئەنـدازەی ئیقلیـد، کە یەکێـک لە بەڵگەنەویسـتەکانی ئیقلیـد کە دەڵێـت: گەر راسـتە هێڵێکمـان هەبێـت، لە دەرەوەی ئەم راسـتەهێڵە خاڵێکمـان هەیە. لێـرە چەنـد چەمکێـک هەن وەک راسـتەهێڵ، دەرەوە، خـاڵ. ئەسـڵەن راسـتەهێڵ چییـە؟ دەرەوە چییـە؟ خـاڵ چییـە؟ وەک کـردارە سـەرەتاییەکان لە جەبـری پوخـت، وە یـاخود رادە-تێـرم پێناسـنەکراوەکان لە سیسـتەمی ئیقلیـدی. دروسـت بـوونی سیسـتەم لە خـۆڕا و هەڕەمەکـی نییـە. لێـرە نمـونەیەکی سـادە دەهێنینـەوە بـۆ ئەوەی لە بەڵـگە و سیسـتەم حـاڵی بـین: گریمـان تـۆ دەتەوێـت خـانووەک دروسـت بـکەی، بـۆ ئەوەی بتـوانی تێـدا ئیسـرەحەت بکەیـت و خەو و خوراکـت تێـدا ئەنجـام بـدەی. کە واتە سیسـتەم لە هـاتنە پێشـی گرفتێـک دروسـت دەبێـت و ناچارمـان دەکـات بـۆ چارەسـەری پرسـێک بیـر لە سیسـتەمێکی نـوێ بکەینـەوە، وەک چـۆن زۆر جـار لە لایەن زانسـتەکانی تـر بە تـایبەت فیزیـا، کۆمەڵێـک گرفـت ئاراسـتەی ماتماتیـک دەکرێـت. بـۆ دروسـت کردنـی ئەو خـانووە، لە نێـو زەینـی خۆمـان وێـنەی دەکێشـین، پێوسـتییەکان چـین، بە واتـایەکی تـر کەرەسـتەکان چـین؟ کەرەسـتەکانی دروسـتکردنی ئەم خـانووە کەمەڵێـک شـتن، وەک: بلـۆک، چیمەنتـۆ، شـیش...هتد، بەهەمـان شـێوەی بەڵگەنەویسـتەکانیش کەرەسـتەیەکن. بلـۆک و شـیش و چیمەنتـۆ ئەم چەمکـانە پەیوەنـدییەک بەیەکەوەیـان کۆدەکـاتەوە ئەویـش ئامـانج لە دروسـتکردنی خـانووەک، ناکرێـت بڵـێین ئەم سـێ کەرەسـتەیە-چەمـک بـۆ دروسـتکردنی ئۆتۆمبێلێـک بەکـاربێنین! کەواتە لێـرە سیسـتەمەکە سـنووردار دەبێـت، بەهەمـان شـێوەش لە سیسـتەمێکی ماتمـاتیکی ناتوانـدرێت بـۆ هەمـوو

پرسێک بیر لە سیستەمێکی تاقانە بکەینەوە. کە واتە بە کورتی: ڕوونی و پەیوەندی چەمکەکان لە نێو سیستەمێک، گرنگییەکی زۆری هەیە. ئەمانە هەمووی دەکرێت بڵێین مەعریفەیەکە لە بەستنەوە و تێکهەڵکێشی چەمکەکان و یەکگرتنەوەیان لە شرۆڤەکردنی دۆخێک یان دیاردەیەک، چونکە گرنگترین تایبەتمەندی هزری زانستی، بریتییە لە وردی دارشتنی چەمەکان و بەگشتی کردنیان و کارپێکردنیان بە شێوەیەکی بابەتییانە. کەواتە لەهەمبەر ئەو باسە، کارەکەی گۆدێل چیی بوو کە پرۆژە و کارە هەرە گەورەکەی ڕاسل و واتیهد و هڵبێرت ی لە گۆڕنا؟ بە هەمان شێوە ئەویش بە نمونەیەک: گەر بۆ سیستەمێک سێ مۆدلمان (نمونە) هەبێت و هەرسێ مۆدل پاسەدانی هەموو بەڵگەنەویستەکانی سیستەمەکە بکات بە بێ هیچ گرفتێک، ئەوە ئەو سیستەمە نا تەواوییەکی هەر تێدایە و بێ کەم و کوڕی نییە، بە واتایەکی تر، ناسەقامگیرە. ئەم کەم و کورتیانە توانای خۆ لێ لادانیان تێدا نییە! بۆ نمونە لە جەبردا بابەتێک هەیە بە ناوی مەیدان (Field)، کە چەند بەڵگەنەویستێک دەگرێتە خۆ، ئەو کۆمەڵانەی دەبنە فیلد وەک: کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان، ڕێژەییەکان و ئاوێتەکان، ئەمانە سێ مۆدلن بۆ ئەو سیستەمە کە پاسەدانی هەموو بەڵگەنەویستەکانی سیستەمەکە دەکەن، بەڵام لە ناو خودی مۆدلەکە، شتانێک هەن ڕاستن، بەڵام لە مۆدلەکانی تر ڕاست نین، لە کاتێک هەرسێ مۆدل دەچنە ژێر ناوی سیستەمەکە، وەک: $a \times a = 2$، دیارە ئەمە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان ڕاستە، بەڵام لە کۆمەڵەی ژمارە نا ڕێژەییەکان ڕاست نییە! کەواتە سیستەمەکە لێرە گرفتێکی تێکەوت،

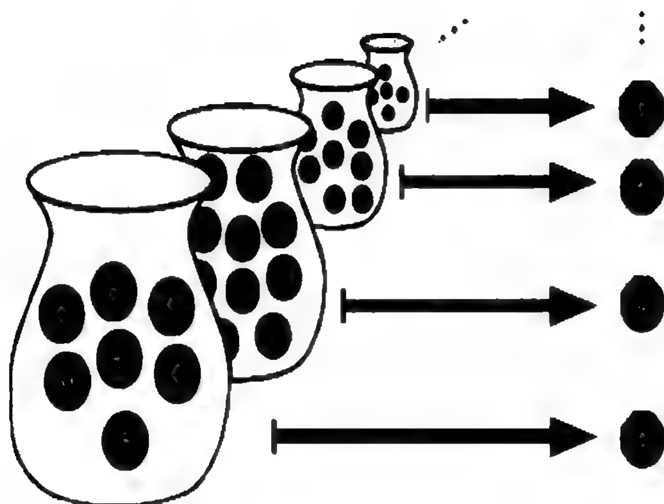
بەمەش بەدەردەکەوێت ئەم سیستەمە ناتەواوە. هەر ئەمەش بوو دوای نزیکەی 20 سالێک ئەو بیروباوەڕەی ببوە قسەیەکی باو لە نێو پەرتوکەکان کە گوایە 'بۆ هەموو ڕاستییەک دەتواندرێ سیستەمێک دروست بکرێت' بە هەڵە خرایەوە. بۆیە ڕاستی و دڵنیایی لە ماتماتیک لە چوارچێوەیەکدایە، لە دەرەوەی ئەو چوارچێوەیە، چەندین هەرەس هەن بۆ سیستەمەکە.[43]

[43] ئەم گوتارە لە نووسینی خۆمە و لە بلۆگی بیرکاری بۆ کورد بلاوکراوەتەوە.

بەڵگەنەویستی بژاردە

The axiom of choice

بەڵگەنەویستی بژاردە، ڕێسایەکی سەرەکییە لە تیۆری کۆمەڵەکان، کە تێیدا وەک بەڵگەنەویستێک سەیردەکرێت بۆ فەراهەمهێنان و دروستکردنی پەیوەندییەک لە نێوان کۆمەڵەکان. بەڵگەنەویستەکە بەم شێوەیە: وادانێ ناکۆتا لە کۆمەڵەمان هەیە، وە هەر کۆمەڵەیەک بە لایەنی کەم زیاتر لە دانەیەکی تێدایە، ئەوە مومکینە کە ناکۆتا لە یەکبەدوای یەک دەستنیشان بکەین و دروست بکەین بە وەرگرتنی هەر دانەیەک لە هەر کۆمەڵەیەک. ئەمەش ڕەنگە تۆزێک نالۆژیکانە دەربکەوێت، بەڵام ئەمە ڕێسایەکە و ڕێگە بەشتێکی لەو شێوەی دەدات. لەمەوەش چەندین بیردۆز سەرئاوکەوت.



تیۆری ئەگەر

Probability theory

تیـــۆری ئەگەر، یەکـــێکە لە لقەکـــانی بیرکـــاری، کە تێـــدا مـــامەڵە لەگەڵ پێشـــــــبینی دەکـــــات و بە دوای دەرئەنجامەکـــــان دەگەڕێـــــت و ئەگەری ڕوودانـــی ڕووداوێـــک دەردەخـــات بە ڕێـــژەیەک. بـــابەتی ئەگەر یەکـــێکە لەو بابەتـــانەی کە تێـــدا پشـــتی بە تیـــۆری کۆمەڵەکـــان بەســـتووە، واتە تیـــۆری کۆمەڵەکـــان خەت و خـــاڵی تیـــۆری ئەگەری داڕشـــتووە، لەهەمـــان کاتـــدا لە نـــاو خۆیـــدا بـــریتییە لە تیـــۆرێکی نـــوێ و ســـەربەخۆ. لە ســـەدەی حەڤـــدەهەمی زایینـــی، زاناکـــان توانیـــان زانســـتی ئامـــار گەشـــە پێبـــدەن و زانیـــاری نـــوێ بـــدەن بە دەســـــــتەوە، کە لەم پێشـــــــکەوتنەش، زانســـــــتی ئەگەر ســـــــەرئاو کەوت.[44] بـــابەتی ئەگەر مـــامەڵە لەگەڵ هەمـــوو ئەنجـــامە مومکینەکـــانی دیـــاردەیەک دەکـــات. نمـــونە: هەڵـــدانی دینـــارێکی ئاســـن (شـــێر و خەت) ســـێ جـــار بە دوای یەک. پـــێش هەمـــوو شـــتێک ئـــێمە دەتـــوانین کـــۆمەڵەی هەمـــوو ئەو ئەنجامـــانەی چـــاوەڕوان دەکرێـــت ڕووبـــدات لە هەڵـــدانی ئەو دینـــارە بـــۆ ســـێ جـــار، هێمـــا-ڕەمـــز بـــۆ دابنـــێین و، بیـــانگۆڕین بـــۆ هێمـــا. بـــۆ شـــێر دەتـــوانین پیتـــی H دابنـــێین و بـــــۆ خەت T دابنـــــێین. کە ئـــــێمە ســـــێ جـــــار ئەو دینـــــارە هەڵـــــدەدەین، ئەوە 8 ئەگەرمـــــان هەیە 2^3 ، لێـــــرە 2 بنچیـــــنەیە، چـــــونکە دینـــــار 2 ڕووی هەیە، بە توانی 3 ، چونکە 3 جار هەڵدان-فڕێیی دەدەین، کە ئەگەرەکان ئەمانەن:

[44] پەرتـــوکی: ئامـــارزانی. د. دلشـــاد شـــاکر ئیســـماعیل بۆتـــانی. بەشـــی ئامـــار-کـــۆلێژی بەڕێوەبردن و ئابووری-زانکۆی سەلاحەدین. چاپخانەی ڕۆکسانا-هەولێر، 2015

$\{TTT,TTH,THH,THT,HTT,HTH,HHT,HHH\}$

بێ گومان دەبێت یەکێک لەم ئەگەرانە ڕووبدات، کە ئەگەری هەر هەموویان بەیەکەوە دەبێت بکاتە 1 ، وە ئەگەری ڕوودانی هەر یەکەیان دەکاتە $\frac{1}{8}$ ، بەڵام ئەگەری ڕوونەدانی هیچ یەک لەمانە، سفرە! لێرە دەتوانین پرسیاری زیاتر دروست بکەین، وەک: ئەگەری ئەوە چەندە کە لەو 3 هەڵدانە 2 خەتی T تێدا بێت؟ ئەگەر سەیری کۆمەڵەی دەرئەنجامەکان بکەین، دەبینین کە لە 3 باردا، لە هەڵدانەکان دەکرێت دوو T تێدا بێت، ئەوانیش:TTT,TTH,THH، واتە ئەگەری ئەوەی لەو سێ هەڵدانە دوو جار خەت دەرکەوێت، دەکاتە: $\frac{3}{8}$. چەندین پرسیاری تر دەتوانین دروست بکەین.



کۆمەڵە توانستییەکان

Power sets

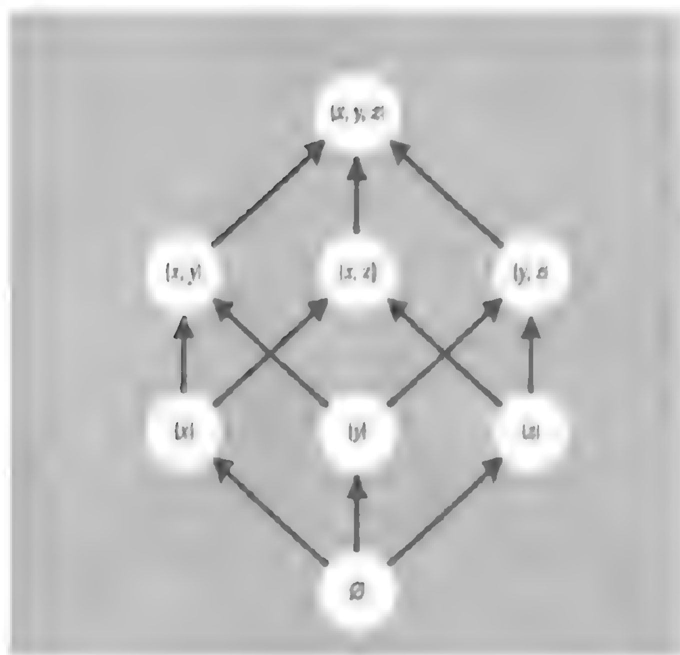
کـۆمەڵەی توانسـتی، بـۆ کـۆمەڵەیەکی وەک S، بـریتییە لە هەمـوو بـنە کۆمەڵەکـانی S و تەنـاتەت کـۆمەڵەکە S خۆشـیی لەگەڵ کـۆمەڵەی بەتـاڵ-ϕ هەمـووی بەیەکەوە. بۆنمـونە: ئەگەر کـۆمەڵەی S مـان هەبێـت: $S = \{0،1\}$ تەنیـا دوو دانەی تێـدا بێـت، ئەوە ئەگەر بێـت و کـۆمەڵە توانسـتی ئەو کۆمەڵەیە بدۆزینەوە، ئەوە دەکاتە:

$$P(S) = \{\ \phi\ ،S\ ،\{0\}،\{1\}\}$$

بیرکـاریزانی ئەڵمـانی "جـۆن کـانتۆر" لە ڕێـگەی بەکارهێنـانی توانسـتی کۆمەڵەکـان، تـوانی پیشـانی بـدات کە ناکۆتـا پـۆلی جیـاوازی ناکۆتامـان هەیە، ئەمەش مشـت و مڕێـک بـوو هاوشـێوەی پارادۆکسـی سەرتاشـەکە. ئەو مشـت و مـڕەی کـانتۆر، ئەوەی دەرخسـت کە دوو جـۆر لە کـۆمەڵەی ناکۆتامـان هەیە، ئەوانـیش: کـۆمەڵەی ناکۆتـای ژمێـردراو (Countable) و کـۆمەڵەی ناکۆتـای نەژمێـردراو (Uncountable)، کـۆمەڵەی ناکۆتـای نەژمێـردراو واتە هـیچ پچڕانێکـی تێـدانییە، وەک کـۆمەڵەی ژمـارە ڕاسـتییەکان. جـۆن کـانتۆریش لە ڕێـگەی ئەم بیـردۆزەوە، پیشـانی دا کە

توانســـتی کـۆمەڵەیەکی ناکۆتـا، زۆر گەورەتـرە لە خـودی کـۆمەڵەکە! وەک لەو نمـونە سـەرەوە دەبینـین، کە توانسـتی کۆمەڵەی S دانەکـانی زیـاترە لە دانەکانی ناو کۆمەڵەی S.

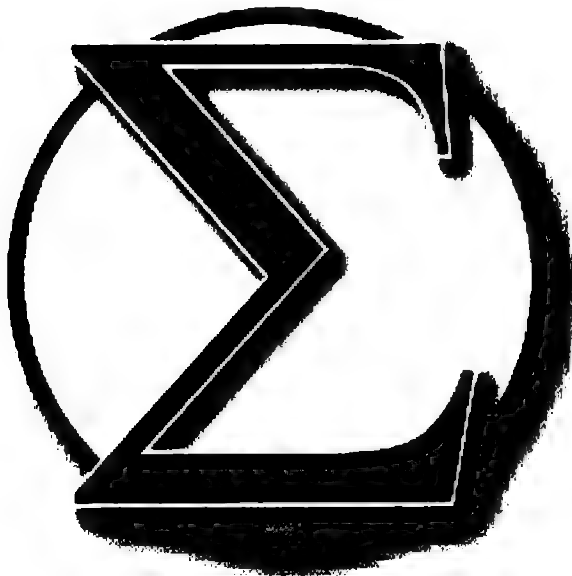
هەر بـۆیە ژمـارەی دانەکـانی P(S) هەمیشـە گەورەتـرە لە ژمـارەی دانەکـانی کـۆمەڵەی S خـۆی. توانسـتی کۆمەڵەکـان، لە "تۆپۆلـۆجی" کە لقێکـی بیرکـارییە، گرنگییەکـی زۆری هەیە، بەجـۆرێ، کـۆمەڵەی توانسـتی لەسـەر ئـاهورتە (Space) تۆپۆلۆجییەکـان بەهێزتـرین تۆپۆلـۆجییە، کە لە بابەتەکانی دواتر باسی لێوەدەکرێت.



بەشی سێیەم

زنجیرە و یەکبەدوای یەک

Seqenes and series



ناساندنی یەکبەدوای یەکەکان

Introducing squenes

یەکـــبەدوای یەکـــی (sequence) بیرکـــاری[45] بـــریتییە لە خشـــتەیەک (List) ژمـــارە، کە تێـــدا ژمارەکـــان ڕیزکـــراون بە شـــێوەیەکی ڕێـــک، وەک کۆمەڵەکـــان. بەڵام جیـــاوازی نێـــوان کۆمەڵەکـــان و یەکـــبەدوای یەکەکـــان لە دوو خـــاڵ دایە، ئەوانـــیش: هەمـــوو یەکـــبەدوای یەکەکـــان کـــۆمەڵەن، بەڵام پـــێچەوانەکەی ڕاســـت نیـــیە. هەمـــوو یەکـــبەدوای یەکەکـــان ڕێزکـــراون و ڕێکـــن، بەڵام کـــۆمەڵە مەرج نیـــیە وابێـــت، چـــونکە لە یەکـــبەدوای یەکەکـــان، یاســـایەک هەیە کە تـــایبەتە و دانەکـــانی نـــاو خشـــتەکە بە شـــێوەیەکی جـــوان ڕێزدەکـــات و بەرهەم دێنێت.

یەکـــبەدوای یەکەکـــان کـــۆمەڵەیەکی ناکۆتـــان، ئەم وەســـفەش بـــۆ هەمـــوو یەکـــبەدوای یەکەکـــان ڕاســـتە، بەڵام بـــۆ کۆمەڵەکـــان مەرج نیـــیە ڕاســـت بێـــت. ســـادەترین نمـــونە لە یەکـــبەدوای یەکەکـــان، بـــریتییە لە کـــۆمەڵەی ژمـــارە سروشـــتییەکان، وەک: ...،1،2،3 کە ڕادەکـــان بـــۆ ناکۆتـــا درێـــژدەبنەوە (Infinite sequence) بە بـــێ کۆتـــایی هـــاتن، وەک: یەکـــبەدوای یەکـــی فیبوناچی، کە لە بەشی یەکەم باسمان کرد.

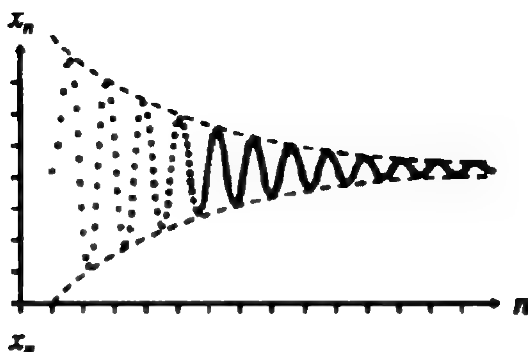
---

[45] خـــۆی بە وردی پێناســـەکە بەم شـــێوەیە: یەکـــبەدوای یەک، بـــریتییە لە نەخشـــەیەک، کە بوارەکەی: کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکانە، مەوداکەی ژمارە ڕاستییەکانە.

ئەو دوو نمـــونەی باســـمان کـــرد، بە زیـــادبوونی ڕادەکـــان، ژمارەکـــان گەورە و گەورەتـــر دەبـــن، بـــۆیە بەم جـــۆرە یەکـــبەدوای یەکـــانە دەڵـــێن: یەکـــبەدوای یەکـــی لێکـــدوورکەتوو (Diverge)، ئەگەر وانەبـــوو، ئەوە پێـــی دەوترێـــت: یەکـــبەدوای یەکـــی لێکنزیکبـــوو (Converge) کـــاتێ نرخـــی ڕادەکـان لە ناکۆتـا نزیـک دەکەیـنەوە. لە یەکـبەدوای یەکـدا، لە نێـوان ڕادەکـان هـیچ کردارێکمـان نیـیە، وەک: کـۆ، کەم و جـاران، تەنیـا بە فـاریزە ڕادەکـان لێک جیادەکەینەوە. نمونەیەک بۆ یەکبەدوای یەک و چۆنییەتی نووسینی:

$$\{a_n\} = \{a_1، a_2، a_3 ،...\}$$

کاتێک $n = 1،2،3،4،5، ...$



نمـــــونەی یەکـــــبەدوای یەکـــــی لێکنزکبـــــوو، وەک ئەو وێـــــنە ڕوونکردنەوەییەی سەرەوە.

ناساندنی زنجیرە

Introducing series

زنجیـــــرەی (Series) بیرکاریـــــانە، بـــــریتییە لە دەســــــتەواژەیەک کە مەبەســـت لە کـــۆکردنەوەی ڕادەکـــانە بە پشـــت بەســـتن بە یەکـــبەدوای یەکـــی ژمارەکـــان. لە یەکـــبەدوای یەک، لە نێـــوان ڕادەکـــان هـــیچ کردارێکـــی کەم و کۆمـــان نەبـــوو، بەڵام لە زنجیـــرە، لە نێـــوان ڕادەکـــان، کـــرداری کـــۆکردنەوە یـــان کەمکـــردنەوە، وەیـــانیش هەردووکیـــان هەیە، بەگشـــتی زنجیـــرە بـــریتییە لە کـــــــۆکردنەوەی هەمـــــــوو ڕادەکـــــــان بەیەکەوە. لەبەر ئەوەی وتمـــــــان کـــۆکردنەوەی ڕادەکـــانە، بـــۆ ئەمەش هێمـــای "ســـیگما" $\sum$ هێمـــایەکە بـــۆ زنجیـــرە، ئەم هێمـــایەش هێمـــایەکی "گـــریکییە" کە تێـــدا خـــاڵی دەســـــتپێکی زنجیـــرەکە و خـــاڵی کۆتـــایی پیشـــان دەدات، لە هەمـــان کاتـــدا، شـــێوەی گشـــتی دانەکـــانی یەکـــبەدوای یەکەکەش (Index) دەگـــرێتە خـــۆی و، ســـنورەکانی زنجیرەکەش، بەم شێوە:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_1 + a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots$$

لە زۆر بـــاردا کـــۆکردنەوەکە بـــۆ ناکۆتـــا ڕادە (Term) دەڕوات، یـــانیش لە هەنـــدێ بـــاردا، بـــۆ کۆتـــادار کـــۆکردنەوەکە دەڕوات. وەک: کـــۆی 100 ژمـــارەی ســـەرەتای کـــۆمەڵەی ژمـــارە سروشـــتییەکان. لێـــرە ســـنورمان بـــۆ دانـــا وتمـــان 100 ژمـــارەی ســـەرەتا، دەشـــکرێت هـــیچ ســـنوورێکی نەبێـــت و بـــۆ

ئاکۆتــا بێــت. بەم جــۆرە زنجیــرەیەش دەڵــێن: کــۆکردنەوەیەکی بەشــی-مەنــدەکی (Partial sum)، واتە لە زنجیــرە گەورەکە بەشــێکی وەردەگــرین و ئەنجامی کۆکردنەوەکەی دەدۆزینەوە، وەک ئەو نموونەی خوارەوە:

$$\sum_{i=0}^{100} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100 = 5050$$

ســوودی زنجیرەکــان زۆر جــار بەکاردێــت بــۆ هەژمــارکردنی تێچــووی شــتێک، وەک: تێچــووی دروســتکردنی باڵەخــانەیە، کە چــۆن تێچــووی دروســتکردنی نهــۆمی یەکەم و نهــۆمی دووەم جیــاوازە، ئەوە بە هــۆی زنجیرەوە دەکرێت تێچووەکەی بخرێتە ڕوو.

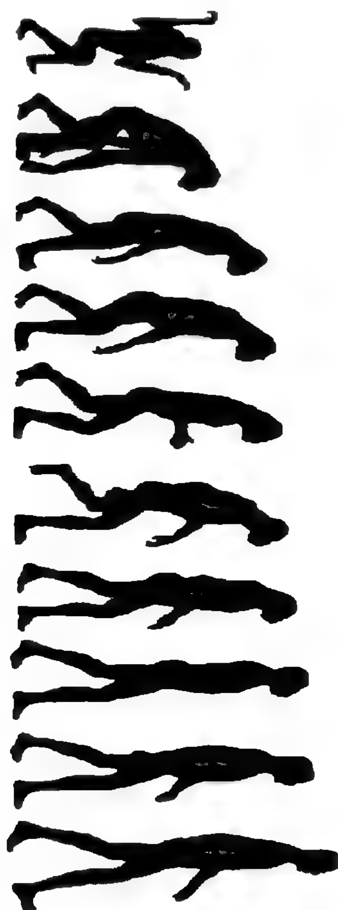


ئامانجەکان

Limits

ئامانجی یەکبەدوای یەکە ناکۆتاکان یان زنجیرە ناکۆتاکان، بریتییە لە ژمارەیەک-نەگۆڕ ئەگەر هاتوو ئامانجەکە بوونی هەبێت. بۆ دۆزینەوەی ئامانجیش، دەبێت ژمارەی ڕادەکان یان کۆکردنەوەکان لە ناکۆتا نزیک بکەینەوە. دیاریشە ئامانجی یەکبەدوای یەکەکە یارمەتیمان دەدات لە دۆزینەوەی ئەنجامی زنجیرەیەک بە نزیکی، یان لە هەندێ باردا، پێمان دەڵێت کە ئەنجامی زنجیرەیەک دەکاتە چەند. وەرگرتنی ئامانج و بەکارهێنانی یەکێکە لە بابەتە هەرە سەرەکییەکانی بیرکاری، هەر بە ئامانج شارستانییەتی گرێک توانیان لە نرخی نەگۆڕی پای نزیک بکەونەوە. لە لایەن "ئیسحاقی نیوتن" بە هەمان شێوە.

بابەتی ئامانج، بەو شێوەی ئێستا پێشکەوتوو و فراوان نەبوو هەتاکو کۆتاییەکانی سەدەی نۆزدەهەم، لەم چەرخەی کۆتایی، پێشکەوتنی زۆری بەخۆیەوە بینی. بابەتی ئامانج لە پشت زۆرێک بابەتی بیرکارییەوەیە، یەکێکە لەوانە: پرنسیپەکانی شیکردنەوەی بیرکاریانە. ئامانج لە زۆر تیۆری گرنگ ڕۆڵی سەرەکی دەبینێت، وەک: لە تەواوکاری ڕیمان، لەگەڵ ئەوەش دەرگای گەشەسەندنی جیاکاری و تەواوکاری بوو (Calculus)، چونکە بەهۆی ئامانجەوە، داتاشراوەی نەخشەکان و دۆزینەوەی ڕووبەری ژێر چەماوەیەک گەشەی سەند، یانیش تێگەیشتن لە هەندێ چەمکی بیرکاری هەر لە ڕێگەی ئامانجەوەیە و بەکاربەریی زۆرە.



پارادۆکسی زینۆ

Zeno's paradox

پارادۆکسەکانی زینۆ، چەند پارادۆکسێکن کە لە لایەن زینۆ خۆیەوە داهێنرا. زینۆ قوتابی پارمیدس[46] بوو، کە خەڵکی ئیلیا بوو، لە دەوروبەری 489 پێش زاین ژیاوە. لە ڕاستیدا زینۆ ئەو پارادۆکسانەی بۆ بەرگری لە مامۆستاکەی هێنایە کایەوە، بەو چەند پارادۆکسە، دژی نەیارانی مامۆستاکەی وەستایەوە. پارادۆکسەکانی زینۆ بە ڕووخسار؛ شێتانە دەردەکەوێت، بەڵام لە ناوەڕۆکدا بەو شێوە سادە و ساکار نییە، بگرە تا ئەمڕۆش ئەو پارادۆکسانە جێگای مشت و مڕی زۆرێک لە زانایان و فەیلەسووفانە، چونکە پارادۆکس بە بیرکردنەوە لێی، دەرگای چەندین پرسیار تر دەکاتەوە. پارادۆکسەکانی زینۆ بەرگری کردن بوو لە بیروبۆچوونێک، ئەویش دەربارەی جووڵە. **پارامیدس؛ نەبوونی جووڵەی ڕەتدەکردەوە، کە پێی وا بوو جووڵە شتێکی وەهمییە.** ژمارەی پارادۆکسەکانی زینۆ زۆرن، یەکێک لەوانە بریتییە لە: **ڕاکردنی نێوان**

---

46 مەسەلەی ماهییەتی ژمارەیی گەردون، وەک بنەمایەکی مەزهەبی فیساگۆرسی، ڕووبەڕووی گرفتێکی جدی بووەوە، ئەویش تەحەدای ئیلیایەکان بوو. قوتابخانەی ئیلیایی زیاتر مەیلی توێژینەوەی فەلسەفییان هەبو وەک لە ماتماتیکی. پێدەچێت دامەزرێنەرانی ئەم قوتابخانەیە لە بناواندا فیساگۆرسی بووبن. ئوستادی هەرە مەزنیان پارمێندیسی ئیلیایی بو، کە لە سالی 450 ی پز لە دایکبوە. مەزهەبی بنچینەیی ئیلیایەکان بریتی بوو لە یەکێتی و ئەبەدییەتی بوون، ئەمەش لەگەڵ چەمکی فیساگۆرسیدا نەدەگونجا و دژ بە یەکتر دەوەستن، چونکە فیساگۆرسەکان ئیمانیان بە فرەگەرایی و گۆڕان هەبوو. (شێرکۆ ڕەشید قادر)

کیسەڵێک و کەروێشکێک لە مەودایەکی دوو میلی. کەروێشکەکە پێی وایە خێرایە، بۆیە رێگە بە کیسەڵەکە دەدات زووتر دەست بە رۆیشتن بکات، واتە تەرحی دەداتێ، کیسەڵەکەش وەک بوونەوەرێکی فەلسەفی و زیرەک، دوای برینی ئەو مەودایەی کە کیسەڵەکە پێی دا، بۆخۆی لێی دادەنیشێت و لە رۆیشتن دەوەستێت، دەڵێت: کەروێشکەکە هەرگیز ناتوانێت بە پێشم بداتەوە.

بیرۆکەکە لێرە ئەمەیە: بۆ ئەوەی ئەو دوو میلە ببڕی، پێویستە نیوەی ½ ببڕیت، بۆ ئەوەی نیوەی ببڕیت، پێویستە ¼ ببڕیت، بۆ ئەوەی ¼ ببڕیت، پێویستە $\frac{1}{8}$ ببڕیت... ئیتر بەم شێوە کیسەڵەکە دەڵێت: کەروێشکەکە هەرگیز ناگاتەوە بەمن، تەنانەت هەرگیز ناگات بە هێڵی کۆتایی مەیدانی ڕاکردنەکە.



یەکبەدوای یەکی فیبوناچی

The Fibonacci sequence

یەکـــبەدوای یەکـــی فیبونـــاچی، بـــریتییە لە کلێشـــەیەکی ســـادە و ســـەرنج ڕاکـــێش. ئەو یەکـــبەدوای یەکە لە ئەنجـــامی دوو ژمـــارەی هەنگـــاوی پێشـــتر، ژمـــارەی ســـێیەم بەرهەم دێنێـــت. فیبونـــاچیی نـــاوی بیرکـــاریزانێکی ئیتـــالییە کە ئەم یەکـــبەدوای یەکەی دۆزیـــوەتەوە لە ســـاڵەکانی (1201)، ئەم یەکـــبەدوای یەکەش لە زۆر بـــابەتی بیرکـــاری خـــۆی دەبینیـــتەوە، تەنـــانەت لە فیزیـــا و سروشـــتیش ئەم شـــتە بـــوونی. لە ڕووی بیرکـــارییەوە، یەکـــبەدوای یەکەکە بەم شێوەی پێناس دەکرێت:

$$Fn_{+1} = Fn + Fn_{-1} \left(\text{لەگەڵ } F_0 = 0 \text{ وە } F_1 = 1\right)$$

ئەوەی لەم یەکبەدوای یەکە دەستمان دەکەوێت:

$$0،1،1،2،3،5،8،13،21،34،55،89، \dots$$

لە زینـــدەوەرزانی ئەم ژمـــارانەی فیبونـــاچی لە چەنـــد ڕووەکێـــک دەبینـــردێن، لەوانە: گـــوڵی گـــوڵەبەرۆژە، یـــان لە زاوزێـــی هەنـــدێک ئـــاژەڵ.

یەکــبەدوای یەکــی فیبونــاچی گرنگــی هەیە لە بــابەتگەلێکی بیرکارییــانە، وەک ئــالگۆریتمی ئیقلیــد، سێگۆشــەی پاســکاڵ و تەنــانەت پەیوەنــدی بە ڕێــژەی زێڕین (Golden ratio) هەیە.



یەکبەدوای یەکە لێکنزیکبووەکان

Convergent sequences

بە ڕادەکـانی یەکـبەدوای یەکێـک دەڵـێن: نزیکبـووەوە (Convergent) ئەگەر هـــاتوو بە زیـــاتر وەرگرتنـــی ڕادەی یەکـــبەدوای یەکەکە، ئەوە لە نرخێـــک-ژمـــارەک نـــزیکبێتەوە، یـــان لە ســـنورێک. ئەو نزیکبـــونەوەیەش تەکنیکـی پێوسـتە، واتە بە ج میتۆدێـک ئـێمە دەگەیـن بەو نـرخە، کە ڕادەکـانی یەکـبەدوای یەکەکە لێـی نزیـک دەکەوێـتەوە؟ بـۆ نمـونە: گەیشـتن بە نرخـی نەگـۆڕی پـای لە ڕێـگەی یەکـبەدوای یەکەوە دەکرێـت. کاتێـک یەکـبەدوای یەکەکە نزیـــک و نزیکتـــر دەبێـــتەوە لە نرخێـــک، ئەوە دەتـــوانین بڵـــێن ئەمە نرخـی نەگـۆڕی پـایە. بـۆ ئەم مەبەسـتەش، تـا بـزانین یەکیـبەدوای یەکێـک لێکنزیکبـــووە یـــان نـــا، ئەوە لە ڕێگـــای پێناســـەی لێکنزیکبـــووە بە چەنـــد هەنگاوێـک دەتـوانین دەریـبخەین کە لێکنزیـک بـووە یـان لێکـدوور کەوتـووە. جۆرێـک لە یەکـبەدوای یەکمـان هەیە پێـی دەڵـێن: یەکـبەدوای یەکـی کۆشـی[47] (Couchy)، لەم یەکـــبەدوای یەکە، جیـــاوازی نێـــوان هەر دوو ڕادەکـــی یەکـــبەدوای یەکەکە زۆر زۆر بچـــوکە. بـــۆ نمـــونە ئەم یەکـــبەدوای یەکەی خوارەوە لێکنزیکبووە:

---

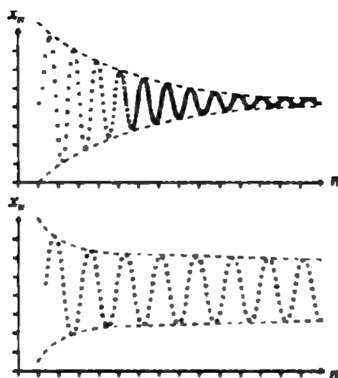
[47] "ئۆگوســتین-لـوی کۆشـی" خەڵکـی فەرەنسـا بـوو. یەکێـک بـوو لەو بیرکاریزانـانەی کە بەردی بنـاغەی شـیکردنەوەی بیرکاریـانەی دانـا و لە چەنـدین لقـی بیرکـاری پێشـەنگ بـووە. لە بیرکـاری چەنـد شـتێک بە نـاوی ئەوەوە نـراوە، وەک: یەکـبەدوای یەکـی کۆشـی، نەخشـەی کۆشـی، ڕێسـای تەواوکـاری کۆشـی، ڕێزکـراوەی کۆشـی، ژمـارەی کۆشـی... . کۆشـی زیـاتر لە هەر بیرکاریزانێکی تر، دەستکەوتە بیرکارییەکانی بە ناوەوە نراوە.

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\ldots,0$$

لێرە بە شێوەیەکی نزیکراوەیی دەگەین بە سفر، نەک بە شێوەیەکی تەواو. ئەگەر سەیر بکەین هەتا رادەی زیاتر وەرگرین، ئەوە ژێرەی کەرتەکان گەورەتر دەبێت و سەرەی کەرتەکەش هەمیشە بریتییە لە 1.

یەکێک لە رێگە هەرە سەرەتاییەکان بۆ زانینی ئەوەی یەکبەدوای یەکێک لێکنزیکبووە یان نا، ئەوە ئامانجی بۆ وەردەگرین بەم شێوە:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\approx 0$$



ئەم وێنەیە دوو یەکبەدوای یەک نیشان دەدات، ئەوەی سەرەوە لێکنزیکبووە، ئەوەی ژێر ئەو، یەکبەدوای یەکێکی لێکدوورکەوتووە.

زنجیرەی لێکنزیبووە

Convergent series

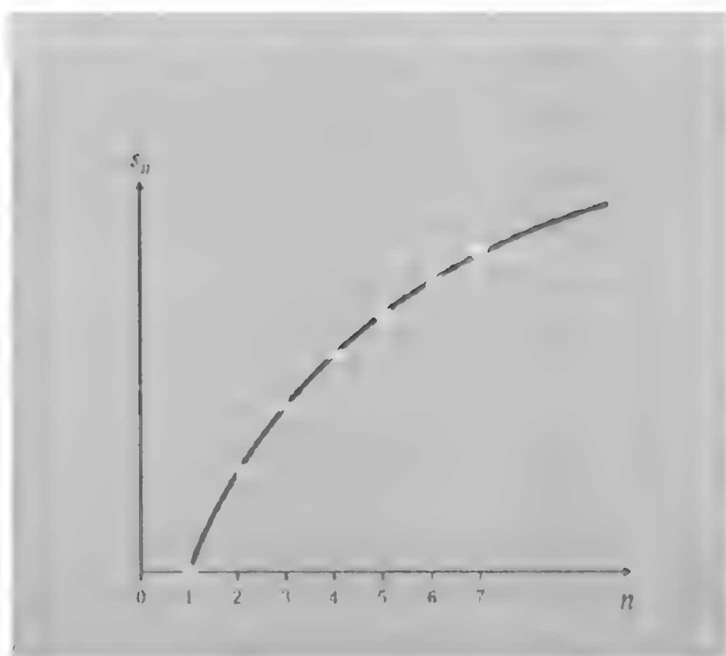
زنجیـــرەیەک پێـــی دەوترێـــت: لێکنزیکبـــووە (Converge) ئەگەر هـــاتوو کـۆی هەمـوو ڕادەکـانی ئەو زنجیـرەیە لە ژمـارەیەکی (زانـراو) دیـاریکراو یـان سـنورێک نزیـک بکەوێـتەوە. بـۆ ئەوەی بـزانین کە زنجیـرەیەک لیکنزیبـوە، ئەوە بەشـێک لە زنجیـرەکە وەردەگـرین (Parial sum)، ئەگەر ئەو بەشـە لێکنزیکبـووە بـوو، ئەوە زنجیـرەکەش لێکنزیکبـووە. مەبەسـتیش لە بەشـێک لە زنجیرەکە واتە کۆی چەند ڕادەیەک (Sum of finite terms):

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

ئەگەر سـەرنج بـدەین جیـاوازی نێـوان s_n و s_{n+1} دەکـاتە: $\frac{1}{n+1}$. واتە ئەگەر سـەیری دوو ڕادەی یەکـبەدوای یەکەکە بکەیـن، دەبینـین کە تەنیـا ژێـرە زیـاد دەکـات بە "یەک" یەکە. کاتێـک n نـرخەکەی زۆر گەورە دەبێـت، ئەوە ئەم ڕادەیە $\frac{1}{n+1}$ زۆر بچـوک دەبێـتەوە، ئەمەش بەسـە بـۆ ئەوەی بڵـێن ئەو زنجیـرەیە لێکنزیکبـووە[48]. ئەم زنجیـرەی سـەرەوە بە زنجیرەی هارمۆنی ناسراوە.

---

[48] مەبەسـت لە لێکنزیکبـووە ئەوەیە کە ئەنجـامی کـۆی هەمـوو ڕادەکـان نەکـاتە ناکۆتـا، بەڵکـو بکاتە ژمارەیەک، ژمارەکەش ژمارەیەکی ڕاستی بێت (Real numbers).



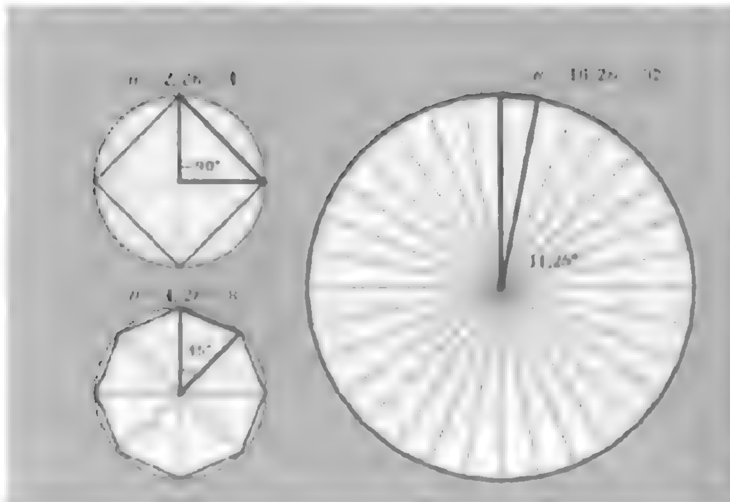
وێنەی زنجیرەی هارمۆنی.

خەملاندنی نەگۆڕی پای

Estimating π

چەندین ڕێگاو شێواز هەن بۆ خەملاندنی نەگۆڕی پای، یەکێک لەم ڕێگانە، بەهۆی یەکبەدوای یەکەوە دەکرێت، واتە لەو نەگۆڕە نزیک دەبێنەوە. ئەگەر سەرێک لە ڕابردوو بدەینەوە بەر لە سەدەی سێیەمی پێش زایین، ئەوە دەبینین کە بیرکاریزانە گریکەکان وەک ئەرخەمیدز لە سیراکوز یەکبەدوای یەکی بەکارهێناوە بۆ دۆزینەوەی نرخی نەگۆڕی پای. ئەگەر سەرنجی بازنەیەک بدەین و نیوە تیرەی ئەو بازنەیە 1 بێت (Unit circle)، ئەوە بە دڵنیاییی چێوەی بازنەکە دەکاتە2π. پاشان بە کێشانی ژمارەیەک چەندلا لە ناو بازنەکە، سەرەتا بە کێشانی چوارلایەک دەست پێ بکەین وەک لەم شێوەی تەنیشت پیشاندراوە، ئەوە هەر پارچەیەک دەتوانین وەک سێگۆشەیەک سەیر بکەین. ئێمە دەزانین کە دەورێکی بازنە دەکات 360 پلە، ئەگەر N لامان کێشابێت لە ناو بازنەکە، ئەوە گۆشەی هەر یەکەیان دەکاتە: $\theta = \frac{360}{\pi}$. وتمان نیوە تیرەی بازنەکە دەکاتە 1، واتە درێژی دوولای هەریەک لە سێگۆشەکان هەر دەکاتە 1. لەم بارە گۆشەی هەر یەکەیان دەکاتە $\frac{\theta}{2}$ ، بە بەکارهێنانی نەخشە سێگۆشەییەکان (Trogeometric functions)، دەتوانین لاکانی تری سێگۆشەکان هەژمار بکەن، پاشان دەگەین بە چێوەی چەندلایەکان.

بێ گومان ئەخەمیدز نەگەیشت بە نرخێکی وە ها زۆر نزیک لەو نرخەی ئێستا، بۆیە ئەو هەستا n لای زیاد کرد. دواتر 'ئیسحاق نیوتن' لە ماوەتێکی زۆر توانی هەژماری ئەو نرخە بکاتە بۆ 15 ڕەنووس دوای فاریزە.



بیرۆکەکە ئەوەیە: چێوەی چەندلایەکە دەکاتە چێوەی بازنەکە کاتێک ژمارە لایەکان بۆ ناکۆتا نزیک دەکەینەوە.

خەملاندنی e Estimating

نەگــــۆڕی e بە ژمــــارەی ئــــۆیلەریش ناســــراوە، کە ژمــــارەیەکی نــــاڕێژەییە، پەیدابوونیشــــی لە ڕێــــگەی گەشەســــەندنێکی یەکــــبەدوای یەکــــی بــــووە، کە هەر لە ڕێــــگەی یەکــــبەدوای یەکەوە خەملانــــدنی بــــۆ دەکرێــــت. هۆکــــاری پەیــــدابوونی ئەم ژمــــارەیەش دەگەڕێــــتەوە بــــۆ گەشــــە و قــــازانج و زیــــان-زەرەر. ئەم نەگــــۆڕە لە لایەن جــــاکۆب برنــــۆلی (Jacob bernole) لە کۆتاییەکــانی ســــەدەی حەڤــدەهەم تیشــکی خــرایە ســـەر. بە بیرکارییــانە بەو شێوە دەنووسرێت:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

مەبەســــت لەم ژمــــارە چیــــیە؟ وادانــــێ دینارێکــــت هەیە، ئەو دینــــارە لە یەک ڕۆژ دینارێــک قــازانج دەکــات. کەواتە خــۆت دینارێکــت هەبــوو، لە یەک ڕۆژ دینــارێکیش قــازانج دەکەی، کەواتە لە ئێــوارە دوو دینــارت پــێ دەبێــت. ئەوجــارە، وا دانــێ ئەو دینــارە تــا نیــوەڕۆ نیــوەی خــۆی قــازانج دەکــات، ئێســتا، تــا نیــوەڕۆ "نیــو دینــار" قــازانج دەکەیــن، وە دینــارەکەی خۆشــمان وەک خــۆی دەمێنێــتەوە، کەواتە لە نیــوەڕۆ "دینــار و نێوکــت" پێــیە، ئەو دینــار و نیــوە لەدوای نیــوەڕۆ، تــا ئێــوارە، دیســانەوە قــازانج دەکــات؛ دینــارەکە، نیــوە قــازانج دەکات، نیوەکەش، نیوەی خۆی قازانج دەکات، لە ئەنجام دا:

$$\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{25}=2.04$$

ئەمە ئەگەر هاتوو دینارەکە لە بەیانی و لە ئێوارە قازانج بکات، واتە دوو هەنگاو، ئەگەر بێت ژمارەی ئەو هەنگاوانە زیاد بکەین بۆ ناکۆتا، ئەوە دەگەینە بەهای نەگۆڕی e.

$$e \approx 2.718$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

دووبارەکردنەوە

Iteration

دووبـارە کـردنەوە-تکـرار لە بیرکـاری بـریتییە لە پرۆسـەیەکی چەنجـار دووبـارە بـووەوە. دووبـارکردنەوە هەنگاوێـک چەنـدین جـار، بەڵام لە هەر هەنگـاوێکی نـوێ، نرخێـک یـان ئەنجـامێکی جیاوازترمـان لە هەنگـاوی پێشـوو دەسـت دەکەوێـت. هەمـوو ئەو ئەنجامـانەی بەدەسـتمان دەگـات، یەکـبەدوای یەکێکمـان بـۆ دروسـت دەکەن، ئامـانجیش لێـی بەدەسـت هێنـانی نرخێکـی دیـاریکراوە، هەر کە گەیشـتینە ئەو نـرخە، ئیتـر پرۆسـەکە دەوەسـتێنین. ئەو بـابەتە لە نومریکـال (Numrical analysis) ڕۆڵێکـی بـاڵای هەیە، کە تێـدا لەم ڕێگـایە، دەگەیـن بە شـیکاری زۆرێـک لە هاوکێشـەکان و کێشـەکان، **ئەوانەی کە بە وردی شـیکارەکەیان نـازانین،** واتە لەم ڕێـگەیەوە شـیکارێکی نزیـک لە شـیکاری ڕاسـتەقینە بـۆ هاوکێشـەکان و شـتەکان دەدۆزیـنەوە. دووبـارەکردنەوە، زمـانێکە کە کۆمپیـوتەری هـاوچەرخ لێـی تێـدەگات. ئەوەی زۆر گـرنگە لەو بـابەتە، سـەرەتا لە نرخێکـی سـەرەتایی (Initial value) دەسـت بە پرۆسـەکە دەکەیـن، هەر لەم نـرخەوە پەیتـا پەیتـا لە نرخـی ڕاسـتەقینەکە نزیـک دەکەوێـنەوە، بەڵام ئەسـتەمە بگەیـن بە نرخـی ڕاسـتەقینە (بـۆچیی؟)[49]. لە ڕاسـتیدا ئەمەش کـارێکی هەر وا ئاسـان نیـیە، چـونکە پـێش

---

49 بـابەتی "شـیکردنەوەی ژمارەییـانە" کە لە قۆنـاغی سـێی زانکـۆ خوێنـدوومە، یەکێـک بـوو لە بـابەتە زۆر بەچێژەکـان لەلام، کە (د. پەخشـان) ئەو وانەی پـێم دا، لەهەمانکاتـدا مامۆستایەکی هاندەر بوو.

ئەمە دەبێت بۆ بابەتی لێکۆڵنەوەکەمان، کەرستەمان-ڕێسا و یاسامان هەبێت. نموونەیەکی ئاسان لە هەمبەر دووبارەکردنەوە: وا دانێی ژمارەیەکی سروشتیمان هەیە x . ئەگەر ئەو ژمارەیەک تاک بوو، جارانی 3 بکە و 1 بۆ زیاد بکە. ئەگەر جووت بوو، جارانی 2 بکە. ئەگەر ئێستا هەمان یاساکە دووبارە بکەینەوە، دیارشە لەو پرۆسەیە لە کۆتایی دەگەینەوە بە 1 گەر بە هەر نرخێکی سەرەتایی دەست پێبکەین.
لە ساڵی 1937 بیرکاریزانی ئەلمانی 'لۆسەر کلاتز' (Lothar Collatz) گریمانەی ئەوەی کرد (conjectured[50]) ئێمە لە هەر ژمارەیەک دەست پێبکەین، ئەوە لە کۆتایی دەگەینەوە بە 1.

نموونە: ئەگەر ژمارە 5 وەرگرین. ئێستا 5 تاکە، بە پێی ڕێساکە $(3 \times 5) + 1 = 16$ ، ئێستا 16 جووتە، بۆیە بە پێی ڕێساکە دابەشی 2 دەکەین دەبێتە 8، دیسانەوە 8 جووتە، بۆیە دابەشی 2 دەکین دەبێتە 4، دیارە 4 یش جووتە، بۆیە دووبارە دابەشی 2 دەکەین دەبێتە 2 ، لەبەر ئەوەی 2 جووتە، دیسانەوە دابەشی 2 دەکەین دەبێت بە 1. ئێستا لێرە دەوستین.

پرسیارەکە ئەوەیە: بیسەلمێنە کە ئەمە بۆ هەموو ژمارەیەکی سروشتی ڕاستە؟!



[50] کۆنجێکتەر (Conjector) دەقێکە نە سەلمێندراوە نە پوچەڵکراوەتەوە.

یەکبەدوای یەکی ژمێرەیی

Arithmetic progressions

یەکــبەدوای یەکــی ژمێرەیــی، بــریتییە لە خشــتە ژمــارەیەک، کە بە شــێوەیەکی جــوان ڕێزکــراون و کلێشــەیەی تێــدایە (Pattern). جیــاوازی نێــوان هەر دوو ژمــارەیەکی یەکــبەدوای یەکــی خشــتەکە، نەگــۆڕە (واتە ژمــارەیەکی دیــارکراوە)، وەک چــۆن لە کــۆمەڵەی ژمــارە سروشــتییەکان ژمارەکــان یەک یەک زیــاد دەکــات و جیــاوازی نێـوان هەر دوو ژمــارەیەکی یەکــبەدوای یەکەکە، تەنیــا بــریتییە لە یەک، یــان وەک: ...،0،13،26،39،52 کە تێــدا جیــاوازی ڕادەکــان نەگــۆڕە و دەکــاتە 13 . یەکــبەدوای یەکــی لەم شــێوە تــا ناکۆتــا بەردەوام دەبێــت. کــۆکردنەوەی هەنــدەکی (Partial sum) لە ڕادەکــانی ئەم جــۆرە یەکــبەدوای یەکــانە ئاســانە لە ڕێــگەی تەکنیکــێکەوە، لە هەمــان کاتــدا سەرنجڕاکێشیشــە. ئەگەر بپرســین کــۆی ئەم زنجیــرەیەی خوارەوە دەکاتە چەند[51]؟

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 100 = ?$$

51 گــاوس کە بیرکــاریزانێکی دیــار و بەناوبــانگە لەهەمــوو کاتێــک، لە تەمەنــی منــداڵی مامۆســتاکەی بــۆ ئەوەی منــداڵەکان بە شــتێکەوە ســەرقاڵ بکــات، دەڵێــت: 1 تــا 100 بــۆ کــۆ بــکەنەوە، گاوســی فــزوڵ و زیــرەکیش دەوای چەنــد چــرکەیەک دەڵێــت: دەکــاتە 5050 ، دیاریشــە بــۆ مامۆســتاکە شــتێکی بــاوەڕپێنەکراو بــووە کە چــۆن منــداڵێک بەو خێــراییە تــوانی ئەمە بکات، ئەویش زلەیەک لە بنەگوێی گاوس دەدات.

ڕێگـایەکی ئاسـان بـۆ هەژمـارکردنی ئەو زنجیـرەیە، بـریتییە لە پێکەوە بەسـتانی ژمارەکـان دوان دوان پـێکەوە، ئەو دوو ژمـارەی کە پـێکەوە دەیانبەسـتینەوە، ئەنجـامی کۆکردنەوەیـان یەکسـانە، بـۆ نمـوونە: **یەکەم ژمـارەی زنجیـرەکە کە بـریتییە لە 1 و کۆتـا ژمـارەی زنجیـرەکە کە بـریتییە لە 100 کە پـێکەوە دەکـاتە 101**، وە دووەم ژمـارەی زنجیـرەکە کە بـریتییە لە 2 و دووەم ژمـارەی زنجیـرەکە لە کۆتـایی بـریتییە لە 99 ، ئەو دوو ژمـارە بەیەکەوە دەکـاتە 101، ئیتـر بەم شـێوە، پرسـیار: چەنـد جـووت لەو ژمارانەمـان دەسـت دەکەوێـت؟ وەڵامەکە ئاسـانە، لەبەر ئەوەی 100 ڕادەمـان هەیە، دابەشـی دوو دەکـاتە 50 جـووت لەم ژمـارانە، ئـەمەش واتە: $50 \times 101 = 5050$

وە لەمەوەش دەگەینە یاسا گشتییەکەی کە بریتییە لە:

$$1 + 2 + 3 + 4 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی

Geometric progressions

یەکـــبەدوای یەکـــی ئەنـــدازەیی، بـــریتییە لە یەکـــبەدوای یەکێـــک لە خشـــتەیەک ژمـــارە، کە ڕادەکـــانی ئەو یەکـــبەدوای یەکە، دروســـت دەبێـــت بە لێکـــــــدانی ڕادەکـــــــانی بە ژمـــــــارەیەک، واتە ژمـــــــارەیەک هەیە (Common ratio) کە بەشداربووی (Factor) هەموو ڕادەکانە، وەک:

$$1،4،16،64،256، ...$$

کاتێـــک کە ئەو ژمـــارە نەگـــۆڕەی کە جـــارانی هەر ڕادەیەک کـــراوە بـــۆ دروســـتکردنی ڕادەی پـــاش خـــۆی، بـــریتییە لە 4 ،کە ئـــێمە بە r هێمـــای بـــۆ دەکەیـــن. کـــۆکردنەوەی هەنـــدەکی-بەشـــێکی یەکـــبەدوای یەکـــی ئەنـــدازەیی بەم شێوەیە دەردەبڕدرێت:

$$Sn = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

ئەگەر ئەم ژمـــــارە r لە یەک گەورەتـــــر بـــــوو، ئەوە ئەم زنجیـــــرەیە زنجیرەیەکـــی لێکـــدورکەوتووە بـــۆ ناکۆتـــای ئەرێنـــی یـــان ناکۆتـــای نەرێنـــی. ئەگەر ئەم ژمـــارە r لە یەک بچـــوکتر بـــوو، ئەوە زنجیـــرەکە لێکنزیبـــووە، کە بەم یاسایە سەرجەمی زنجیرەکە دەدۆزرێتەوە:

$$S = \frac{a}{1-r}$$

یەکـــبەدوای یەکـــی ئەنـــدازەیی گرنگییەکـــی زۆری هەیە لە کێشـــە بیرکارییەکـــان، پەیوەنـــدی بە گەشەســـەندنەوە هەیە و لە زۆر بـــوار لە رێــگەی ئەم یەکــبەدوای یەکەوە لە گەشەســەندنەکان تێــدەگەین زۆرێــک لە مشـــت و مـــڕی بیرکاریزانەکـــان لە روانـــگەی ئەم یەکـــبەدوای یەکە ئەندازەییانەوە بە کێشەکان و پاڕادۆکسەکانی زینۆ دادەچنەوە.



هەمـــوو یەکـــبەدوای یەکەکـــان ناتوانـــدرێت بەهـــۆی ئەنـــدازەوە پیشـــانبدرێت، هەر شـــتێکیش کاتێـک بەهـۆی ئەنـدازەوە نیشـان دەدرێـت، ئەوە تێگەیشـــتن لێـــی خۆشـــتر و ئاســـانترە. بـۆیە لە بیرکـــاری شـــتێک هەیە پێـــی دەڵـێن: سـەلماندن بەبـێ بەکارهێنـانی وشــە (Proof without words)، خـۆی لە ڕاسـتیدا وێـنە تەنیـا ڕێـگەی داتاشـینی سـەلماندنەکان ڕۆشـندەکاتەوە نەک زیاتر.

زنجیرەی هارمۆنی

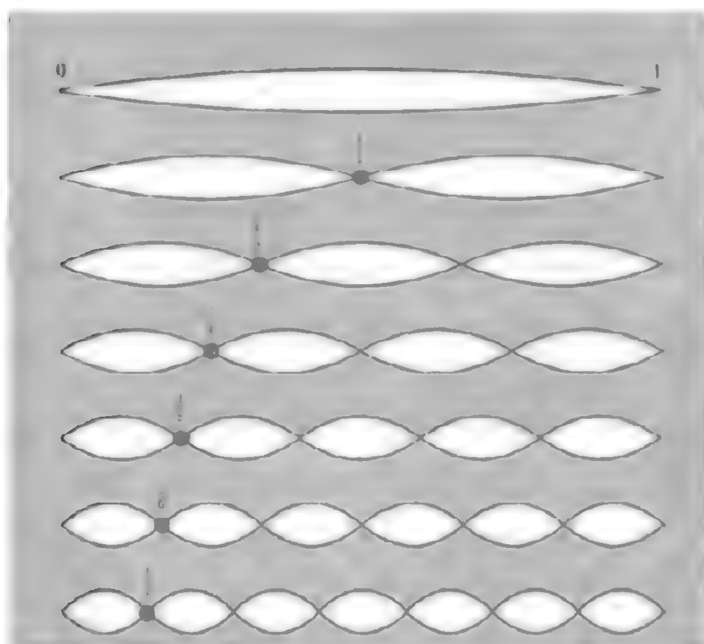
The harmonic series

زنجیــرەی هــارمۆنی، بــریتییە لەو زنجیــرەی- یەکــبەدوای یەکــانەی کە بــێ ســنور لە کەمــی دەدەن (کەرتــن). ئەم زنجیــرەیە لە تیــۆری مۆیســقا[52] گرنگییەکی زۆری هەیە، ئەم شێوەی خوارەوە، نمونەیەکە:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

ئەوەی جێگــای ســەرنجە لەم زنجیــرەیە یــان لەم یەکــبەدوای یەکە، ئەوەیە هەرچەنــدی ڕادەکــان بــۆ ناکۆتــا بــڕۆن، ئەوە زیــاتر گــرژ و بچــوکتر دەبــنەوە بەرەو ســفر. لەم زنجیــرانە هەر ڕادەیەک، بەتەنیــا گەورەتــرە لە کــۆی چەنــد ڕادەیەکــی دوای خــۆی، نمــونە: $(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$ گەورەتــرە لە: $(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})$.

[52] زنجیــرەی هــارمۆنی لە ئــامێری دەف و ژەنینــی دەف بە نــا-ڕاســتەوخۆ بــوونی هەیە، کەسی دەف ژەن بەکاری دێنێت بۆ دروستکردنی تەکنیک لەکاتی ژەنینی دەفە و سۆلۆ.



زنجیـــــرە هارمۆنییەکـــــان لە فیزیـــــا گرنگییەکـــــی زۆر هەیە لە بـــــابەتی شـــەپۆڵەکان و بەیەکـــداچوونی شـــەپۆڵەکان، بەم هـــۆیەوە تەفـســـیر بـــۆ چەنـــدین دیاردە دەکرێت.

زنجیرە و نزیکەیی

Series and approximation

هەنـــدێک لە ژمـــارە بنچینەییەکـــانی-گرنگەکـــانی بیرکـــاری، لە ڕێـــگەی زنجیـــرە ناکۆتاکـــانەوە لەدایـــک دەبـــن، هەر بـــۆیە زنجیرەکـــان ڕێگـــایەکن بـــۆ دۆزیـــنەوەی هەنـــدێک ژمـــارە بە نزیکەیـــی، وەک: پـــای π یـــان e و هەنـــدێ لە لۆگـــاریمتە سروشـــتییەکان. لەمەو پـــێش زنجیـــرەی هارمۆنیمـــان بـــاس کـــرد، کە بەم شێوە بوو: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$

ئەگەر بێـــــت و نیشـــــانەی ڕادەی یەکەم لەو زنجیـــــرە هـــــارمۆنییەی ســـــەرەوە بکەیـــــنە (−)، نیشـــــــانەی ڕادەی دووەم (+)، نیشـــــانەی ڕادەی سـێیەم (−) ....، بەم شـێوە تـــا ناکۆتـــا، ئەوە ئەنجـــامێکی ســـەیرمان دەســـت دەکەوێـــت، ئەویـــش لۆگـــاریتمی سروشـــتی 2. هەر هەمـــان زنجیـــرە، ئەگەر بێـــت و ژێـــرەی کەرتەکـــان هەمـــووی دووجـــا بکەیـــن، ئەوە نرخێکـــی سەرنجراکێشـــمان دەســـت دەکەوێـــت، ئەویـــش: $\frac{\pi^2}{6}$. لە ڕاســـتیدا تـــوانی ژمـــارەی کەرتەکـــان چەنـــد بێـــت، ئەوە لە ئەنجـــام پـــای بەو هێـــزە-توانەمـــان دەســـتدەکەوێت. لە کۆتایـــدا، ئەگەر ژێـــرەی هەر کەرتێـــک، ژمـــارەکە بگـــۆڕین بـــۆ 'لێکـــدراوی' ئەو ژمـــارەیە، ئەوە e مـــان دەســـتدەکەوێت! لێکـــدراوی ژمارە (Factorial) بۆنمونە:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=ln(2)$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots=e$$

$$1+\frac{1}{2\times 1}+\frac{1}{3\times 2}+\frac{1}{4\times 3}+\cdots=2$$

زنجیرەی توانی

Power series

زنجیـــرەی تـــوانی، ئەو زنجیـــرەیە کە ڕادەکـــانی هێـــز-توانیـــان هەیە، توانەکـــانیش لە بەرزبـــوونەوەدان بە زیـــادبوونی هەر ڕادەیەک. زنجیـــرەی ئەنـــدازەیی بـــارێکی شـــازە لە زنجیـــرەی تـــوانی. زنجیـــرەکە بەو شـــێوە دەنووسرێت کاتێک x گۆڕاوەکەمان بێت:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

کاتێک کۆلکەی هەموو ڕادەکان بریتییە لە (یەک).

زنجیـــرەی تـــوانی بـــابەتێکی زۆر گشـــتی و گـــرنگە، کە زۆرێـــک لە نەخشـــەکان دەتوانـــدرێت بە شـــێوەی ئەم زنجیـــرەیە بنووســـرێت، ئەمەش ڕۆڵـــی ســـەرەکی هەیە لە چارەســـەری هەنـــدێک لە کێشـــەکانی بیرکـــاری، بـــۆ نمـــونە ئەو نەخشـــانەی نـــاتوانین ڕاســـتەوخۆ تەواوکـــاری یـــا داتاشـــراوەیان بـــۆ بـــدۆزینەوە، ئەوە لە ڕێـــگەی زنجیـــرەی نەخشـــەکە تەواوکـــارییەکەی یـــان داتاشـــراوەکەی هەژمـــار دەکەیـــن بە شـــێوەیەکی نزیکەیـــی. ئەگەر هـــاتوو کۆلکەی هەموو ڕادەکان سفر بوو، ئەوە دەچێتەوە بابەتی ڕادەدارەکان.

لێـــرە پرســـیارێک دروســـت دەبێـــت، ئایـــا زنجیـــرە توانییەکـــان زنجیرەیەکـــی لێکنزیکبـــووەوە؟ بە بەکارهێنـــانی تیـــۆری یەکـــبەدوای یەکـــی ئەنـــدازەییەکان، دەتـــوانین بڵـــێین، ئەگەر هـــاتوو نرخـــی x لە نێـــوان (1-) و (1)

بـــوو ($-1 < x < 1$)، ئەوە بەشـــە کـــۆکردنەوەی ئەم زنجیـــرەیە، لێکنزبـــووە بـــۆ $\frac{1}{1-x}$. بـــێ گومـــان هەمـــوو زنجیـــرە توانەکـــان نـــاچنە ژێـــر بـــاری ئەم یاسایەوە.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c)^1 + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

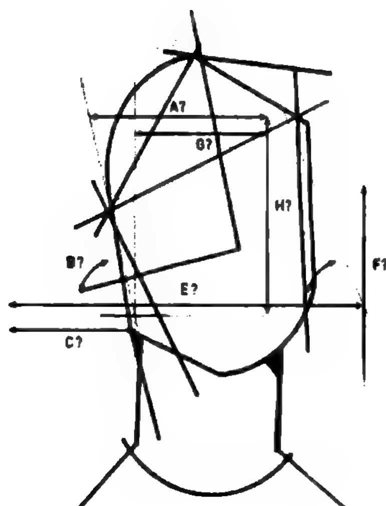
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

بەشی چوارەم

ئەندازە

Geometry



ناساندنی ئەندازە

Introducing geometry

ئەندازە، بریتییە لە لێکۆڵینەوە لە شێوەکان (shapes)، قەبارە، شوێن -پێگە و بۆشایی- ئاهووتە. لەگەڵ ئەوەش، وەسفی خاڵ و راستەهێڵ و چەماوەکان دەکات لە رووتەختدا. یەکەم جۆری ئەندازە، بریتییە لە "ئەندازەی ئیقلیدی"، ئەو ئەندازەیەی هەر لە قۆناغی ناوەندی پێی ئەشنا دەبین. کە مێژووی ئەم ئەندازەیە دەگەڕێتەوە بۆ 300 ساڵ پێش زاین کە لە لایەن "ئیقلید" لە گریک گەشەی سەند[53]. ئەندازەی ئیقلیدی لە چەند بەڵگە نەویستێک[54] پێکهاتووە، کە تەواوی بیردۆزەکان لە مەڕ ئەندازەی ئیقلیدی بە هۆی ئەم بەڵگە نەویستانەوە سەلمێنەی بۆ کراوە. ئیقلید لە پەرتوکەکەی بە ناوی دانەکان (Elements) سەرجەم بیرۆکە ئەندازەییەکانی لە دوو تویی 13 پەرتوک خستوتە ڕوو. ئەندازەکەی ئیقلید 5 بەڵگەنەویست (Axioms) لە خۆ دەگرێت، کە ئەمانەن:

i. بەهۆی هەر دوو خاڵێک، دەتوانین راستەهێلێک بکێشین.

ii. بەشێکی ڕاستەهێڵ دەکرێت بۆ ناکۆتایی درێژبێتەوە.

iii. بازنە دەتواندرێت لە هەر نیوەتیرەیەک و هەر چەقێک بکێشرێت.

iv. هەر دوو گۆشەیەکی ڕاست یەکسانن.

---

[53] ئەندازە بەر لە یۆنانییەکان بوونی هەبوو، وەک لە شارستانییەتی میصر.

[54] بەڵگە نەویست، وتەیەکە-دەستەواژەیەکە بە ڕاست دادەندرێت بە بێ سەلماندن.

٧. بۆ هەر راستەهێڵێکی دراو کە خاڵێک هەبێت نەکەوێتە سەر راستەهێڵەکە، ئەوە راستەهێڵێک هەیە بەو خاڵەدا دەڕوات و راستەهێڵەکەی تر نابڕێت (راستەهێڵێکی تەریب).

لەگەڵ ئەوەش، لە بەڵگەنەویستەکانی ئیقلید چەند شتێک بەبێ تەفسیر مانەوە، وەک راستەهێڵ، خاڵ، گۆشەی راست و نیوە تیرە. دوای ئەوەی لە سالانی (1800) چەند بەڵگەنەویستێکی تر ناسێندرا، کە ئەوەش بوە هۆی گەشەسەندنی ئەندازە و ڕژێمی-سیستەمی بەڵگەنەویستەکان.



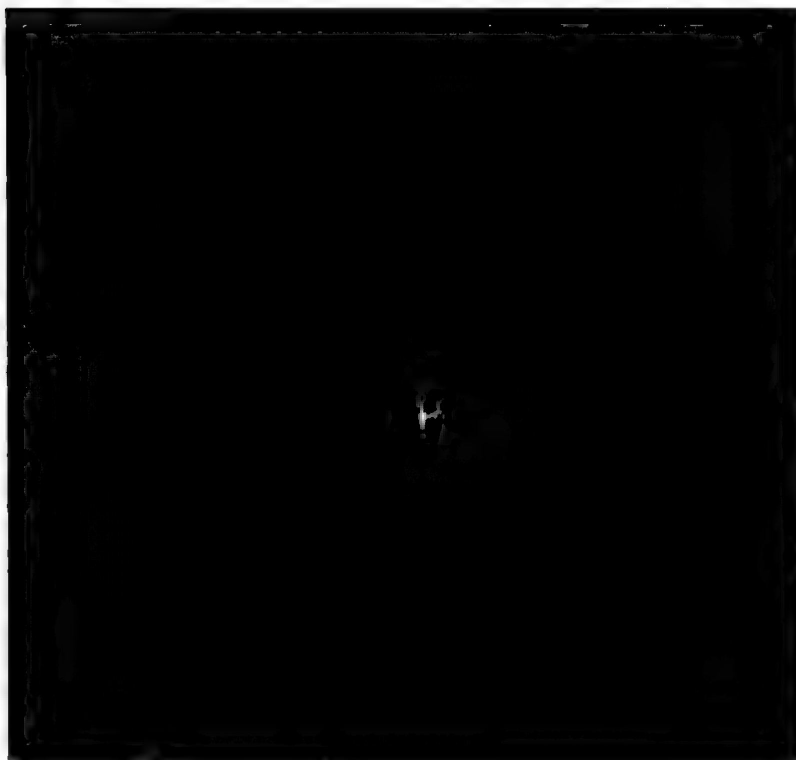
راستەهێڵەکان و گۆشەکان

Lines and angles

ڕاستەهێڵ و گۆشە، دوو بابەتی زۆر سەرەکین لە ئەندازەزانیدا، ئەم دووانە کرۆکی ئەندازەن. بەڵگەنەویستی پێنجەمی ئیقلید دەڵێت: ئەگەر ڕاستەهێڵێکمان هەبێت و خاڵێک هەبێت نەکەوێتە سەر ئەو ڕاستەهێڵە، ئەوە ڕاستەهێڵێک هەیە بەو خاڵەدا دەڕوات و ڕاستە هێڵەکەی تر نابڕێت. بەڵام خۆ دەکرێت ئەو ڕاستەهێڵە بە خاڵەکەدا بڕوات و ڕاستەهێڵەکەی تر ببڕێت!

چەمکی گۆشە، بریتییە لەو چەمکەی یان ئەو پێداوستییەی کە تێیدا وەسفی ئەوەمان بۆ دەکات چۆن ڕاستەهێڵەکان یەکتری دەبڕن، ئایا کراوەی ئەو یەکتربڕینە چەندێکە. وادانێ دوو ڕاستەهێڵمان هەیە یەکتری دەبڕن لە خاڵی p ، وەک لە وێنەکە نیشاندراوە. لەم بارەدا، بازنەیەک کە چەقەکەی بریتییە لە p، دابەشدەبێت بۆ چوار بەش؛ چوار بەشە ڕاستەهێڵ (Segment) دەکەونە ناو بازنەکە، ئەگەر ئەو چوار بەشە ڕووبەری یەکسان داگیر بکەن لە ناو بازنەکە، ئەوکات ئەو بەشە ڕاستەهێڵانە پێیان دەوترێن ئەستوون (perpendicular) وە گۆشەکان گۆشە وەستاو دەبن (Right angle)، واتە گۆشەی پلە 90. ئەمەش پەیوەندی بە بەڵگەنەویستی چوارەمی ئیقلیدەوە هەیە. لە باری جیاوازدا، گۆشەکان بە پلە پێوان دەکرێت.

هەر چەنــدە ئەنــدازە زۆر لە پــێش گریکەکــان بــوونی هەبــووە، لە شارســتانییەکانی تــری وەک: بابلییەکــان و میصــرییەکان، بەڵام بەو شــێوە نەبووە کە ئیقلید باسی کردووە.



پێوانەکردنی گۆشەکان

Measuring angles

پێوانی گۆشە بە یەکەی "پلە" دەبێت. لە کۆندا، پێوانەکردنی گۆشەکان لە نێوان دوو راستەهێڵدا کە یەکتریان بڕیووە، پێوانەکراوە بەهۆی کێشانی بازنەیەک بە دەوری ئەو خاڵەی کە دوو راستەهێڵەکە یەکتریان تێدا بڕیووە، پاشان دابەشکردنیان بۆ چەند یەکەیەکی یەکسان. شارستانییەتی نێوان دوو ڕووبار[55] و ئەستێرەناسەکانی ئەو شارستانییەتە، بیرۆکەیەکی نوێیان بە جیهان ناساند، ئەویش ئەوە بوو دەورێکی بازنەیان بە 360 مەزندەکرد، وەک ئەوەی ئەمڕۆ ئێمە کاری پێدەکەین و لە قوتابخانە و ناوەندە ئەکادیمییەکان دەیانخوێنین.

هەروەها هەر ئەوان بوون کاتژمێریان دابەشکرد بۆ 60 خولەک، هەر خولەکێک بۆ 60 سانییە-چرکە. دەشێت 60 مەزندەکردبێت لەبەر ئەوەی 60 بەسەر 1،2،3،4،5،6 و چەندین ژمارەی تر دابەش دەبێت. سەرەڕای ئەمانەش، ئەو شارستانییەتە لە بری بەکار هێنانی ڕژێمی دەیی، ڕژێمێکی تایبەت بەخۆیان داهێنا، ئەویش "ڕژێمی شەستی" بوو، هەر لەو سۆنگەیەوە، ئەو دابەشکردنانەی لەسەرەوە باسمان کرد، گشتی لە ڕێگەی ئەو ڕژێمەوە سەر ئاو کەوتووە.

---

[55] نێوان دیجلە و فورات.



why 360 بۆچی

بـۆچی دەورێکـی بـازنە 360 پـلەیە؟ ئایـا هەرگیـز بیـرت لێکـردۆتەوە کە بــۆچی 360 ؟ ئایــا ئەم ژمــارەیە بە هەڕەمەکــی (Randomly) هەڵبژێـردراوە؟ بـۆچی ژمـارەیەکی تـر نەبـوو، وەک: 400 یـان 500 یـانیش ...هتـد؟ نهێنـی پشـت ئەم ژمـارەیە چیـیە؟ لێـرە هەوڵ دەدەیـن وەڵامـی ئەم چەند پرسیارەی سەرەوە بدەینەوە.[56]

لێـرە پێوسـتە شـتێک بخەیـنە ڕوو؛ کە ئەم ژمـارەیە بـۆ بـازنەی بچـوک یــان گەورە هەر هەمــان ژمــارەیە. هەڵبژاردنــی ئەم ژمــارەیە بــۆ دەورێکــی بــازنە 360، بــۆ یەکێــک لەم هۆکــارانە دەگەڕێــتەوە، ئەمەش واتــای ئەمەیە وەڵامێکـی تەواو دڵنیـا بـوونی نیـیە لەم بـارەیەوە، بەڵام وەک ئاماژەمــان پێـدا دەشـێت بــۆ چەنــد هۆکارێــک بگەڕێــتەوە، هۆکارگەلێــک کە زۆر جــوان و ڕازیـکەرە بـۆ ئەم مەبەسـتە. ئەم هۆکـارانەش دەگەڕێـتەوە بـۆ چەنـد هەزار ساڵێک بەر لەئێستا لە لایەن بابلییەکان و گریکەکان...

هۆکــاری یەکەم (درێــژی ســاڵ):- ئەگەر هەتــاکو ئێســتا بیــرت لەم ژمــارەیە (360) نەکــردۆتەوە، ئەوە گــرەو دەکەیــن کە تــۆ لە مــاوەی بیرکـردنەوەت بـۆ چەنـد خولەکێـک لەم سـاتەی ئێسـتادا لەمەڕ ئەم ژمـارەیە، دڵنیــاین کۆمەڵێــک ئەگەرت بــۆ دێــتە پــێش، ئەگەر هەتــاکو ئەم چەنــد خـولەکەش کە ئەم بـابەتە ئەخـوێنیتەوە و دڵنیـا نیـت و بیـرت بـۆ هـیچ شـتێک

[56] ئەم بابەتە لە پەرتوکەکە باس نەکراوە، بەڵام بە پێوستم زانی کە زیادی بکەم.

ناچێت، ئەوە بـا بـۆت ئاسـان بکەیـن، ئـایە ئەم ژمـارەیەت (360) لەکـوێی تـر بەرچـاوت کەوتـووە یـان بەر گوێـت کەوتـووە؟ بـۆیە بیـر لە سـاڵ و ڕۆژ بـکەرەوە ؟ زەوی سـاڵێکی دەوێـت تـاکو خولێـک بەدەوری خـۆر تەواو بکـات، سـاڵێک زیـاتر یـان کەمتـر (بەرێژەیەکـی کەم) هەر لە نێـوانی 365 ڕۆژ دایە، بەڵام لە سـاڵنامەی بابلییەکـان و فارسـەکان؛ سـاڵنامەکانیان لەسـەر 360 دامەزرانـدبوو، بەڵام لەهەنـدێ شارسـتانی تـر کەمتـر بـوو، بەم جـۆرە دەشـێت وەک هاوسـەنگییەک لە نێـوان ئەم شارسـتانییانە 360 هەڵبژێردرابێت.

هۆکـاری دووەم (بابلییەکـان و سیسـتەمی ژمـارە شەسـتی):- بابلییـەکان سیسـتەمێکی ژمـارەیی گـەلێک نایـاب و دانسـقەیان دارشـتووە، کـە لـە مێـژوودا بـە "سیسـتەمی شەسـتی" ناسـراوە و هـەتا ئـەمڕۆش لـە پێـوانی زەمەنـدا بـەکاردێت، یەک کـاژێر شەسـت خـولەکە و یەک خـولەک شەسـت چـرکەیە. کە پێشـی ئەڵـێن سیسـتەمی سەکساگەسـیمال. بابلییەکـان بە سـەرنجدانیان لە نـاو بـازنەیەک ئەگەر هـاتوو نیـوە تیـرەکەی بـزانین، ئەوە دەتـوانین 6 سێگۆشـەی لایەکسـان (کە درێـژی لایەکـانی ئەکـاتە نیـوەتیرەی بـازنەکە) بکێشـین. لەبەر ئەوەی لای بابلییەکـان ژمـارە 60 وەک بنچینـەیەک بـۆ کارەکانیـان بەکاردەهێنـا، بـۆ هەر یەک لە سێگۆشـەکان ژمـارە 60 پێـدا (دەشـێت وەک هێمـا-سـیمبول زۆر جـار 60 بەکارهێنابێـت بـۆ نوانـدنی شـتێک) دواتـر بەلێکـدانی (لەبەر ئەوەی 6 سێگۆشـەی لایەکسـان هەیە) 6 بە 60 ، ژمارە 360 چنگ خستووە..

هۆکــــاری ســــێیەم (360 وەک ژمـــــارەیەکی دابەش- Composite number):- دەشــێت هۆکارێــک بــۆ خۆشویســـتی ژمــارە 360 ئەوەبووبێــت کە ئەم ژمــــــارەیەک کۆمەڵێـــــک کــــۆلکە (factor) هەیە کە 24 کـــــۆلکەیە، کەئەمانەن:

1،2،3،4،5،6،8،9،10،12،15،18،20،24،30،36،40،45،60،72،90،120،180،360

بـــۆیە هەر بە ئاســـــانی دەتوانـــدرێت بـــازنە بەســــەر 12 بەش دابەش بکرێــت (ســەعات-کــاژێر) کە گۆشـــەی نێـوان هەر کاژێرێــک دەکــاتە 30 پــلە. (بیـــربکەرەوە، ئەگەر گۆشـــەی نـــاو بـــازنە 100 بـــوایە، لە کـــاتژمێر چــــی ڕوویــدەدا؟). بــۆیە هۆکــاری ســێیەم ئەوەبــوو کە 360 ژمــارەیەکی دابەشــی گەورەیە کە کـــۆلکەیەکی زۆری هەیە. واتە ژمــــارەیەکی تەواوی گەورەتـــری نزیک لە 360، ژمارەی کۆلکەکانی کەمترە لە کۆلکەکانی ژمارە 360.

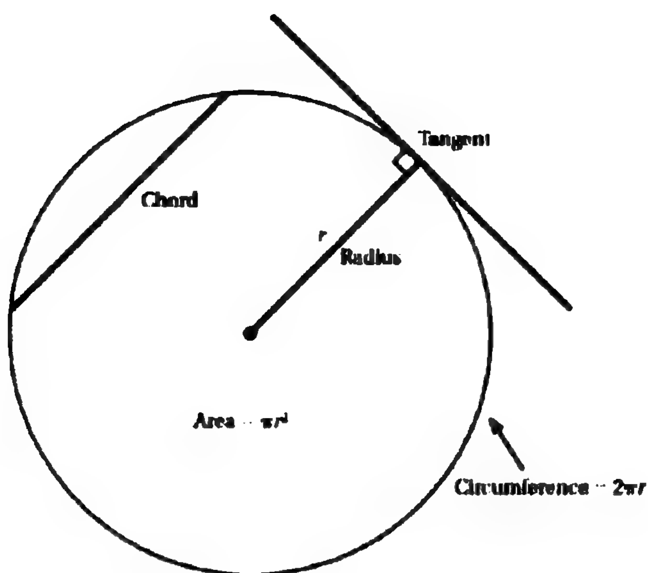


بازنە

Circle

بــازنە، بــریتییە لە کــۆمەڵەی A هەمــوو ئەو خــاڵانەی، کە دوورییەکــی یەکســـانیان هەیە لە خاڵێــک کە پێــی دەوترێــت: چەق. دووری نێــوان چەق (Center) و خاڵەکــانی دەوری چەق، پێــی دەوترێــت: نیــوەتیرە (Radius). بــازنە یەکـێکە لەو شــتە ســەرەتاییانەی لە بەڵگەنەوســتەکانی ئیقلیــد بونیــان هەیە. چەمــاوەی داخــراوی ئەو خــاڵانەی کە دەوری چەقیــان داوەی، پێــی دەوترێــت: چێــوە (Circumference). چــۆنییەتی دۆزیــنەوەی ئەو چێــوەیە بـۆ بـازنەیەک کە نیـوە تیـرەکەی بـریتییە لە r، دەکـاتە: $C = 2\pi r$. بە هەمــان شــێوە، بــۆ هەژمــارکردنی ڕووبەری بــازنەیەک بە زانینــی نیــوەتیرەکەی، ڕووبەر دەکاتە: $A = \pi r^2$.

هەر لە بـابەتی بـازنەوە چەنـد شـتێکی تـر پێناســەدەکرێت، ڕاســتەهێڵ و ڕووبەر. شــتێکی ترمــان هەیە پێــی دەوترێــت: کەوانە (arc) کە بــریتییە لە بەشـێکی چێـوەی بـازنە. بـابەتێکی تـر هەمـانە پێـی دەوترێـت: ژێ (chord) کە بــریتییە لەو هــێڵەی کە بە دوو خــاڵی ســەر چێــوە تێپەڕدەبێــت، ئەو نـاوچەی دەکەوێـتە نێـوان ڕاسـتەهێڵی ژێ و چێـوەی بـازنەکە، پێـی دەوترێـت: بەشــە ڕووبەر. ڕاسـتەهێڵی لاریمـان هەیە (Tanget Line) کە بەرکەوتنــی لەگەڵ یەک خاڵی چێوەی بازنە هەیە.

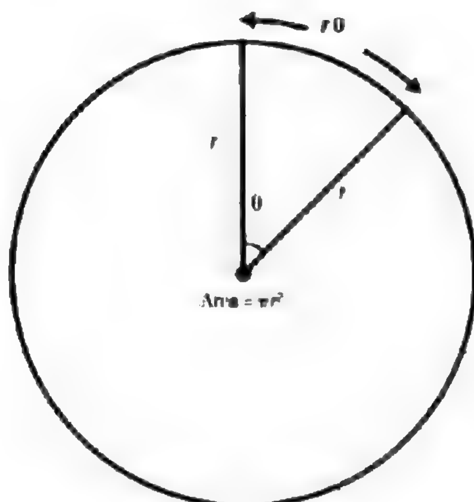

Tangent
Chord
r
Radius
Area = πr²
Circumference = 2πr

گۆشەی نیوەتیرەیی

Radian angle

یەکێک لە شوێنگرەوەکانی پلە (Degree)، بریتییە لە گۆشەی نیوەتیرەیی. گۆشەی نیوەتیرەیش هەر لەسەر بنچی بازنەوە خەت و خالی دارێژراوە هەر وەک پلە. لەگەل ئەوەش، گۆشەی نیوەتیرەیی سودگەلێکی هەیە، بە تایبەت لە هەمبەر نەخشە سێگۆشەییەکان. گۆشەی نیوەتیرەیی بەوە پێناسە دەکرێت کە پێوانەی چەقە گۆشەیەک لە بازنەیەک کە نیوە تیرەکەی بریتییە لە r و کەوانەیەک (arc) درێژییەکەی بریتییە لە r دیاردەکات ئەگەر بازنەی "یەک" مەت (circle unit) بەکارهێنا.

بۆ ئەوەی لەمە حالی بین، وا دانێ بازنەیەکمان هەیە نیوە تیرەکەی بریتییە لە 1، لەبەر ئەوەی چێوەی بازنە دەکاتە: $C = 2\pi r$ ، ئەگەر $r = 1$، ئەوە $c = 2\pi$. بۆیە پارچەیەک x (Portion) لە بازنەکە، گۆشەی θ ی نیوەتیرەیی هەیە، کاتێک $\theta = 2\pi x$. نمونە: پارچەکردنی بازنەکە بۆ چوار بەشە راستەهێل (Segment)ی یەکسان، ئەوە گۆشەی پلە 90 پێ دەدات، کە ئەوەش دەکاتە 2π جارانی $\frac{1}{2}$ یان $\frac{\pi}{2}$ نیوەتیرەیی.



دەتـوانین گۆشـەیەک لە پـلە بگـۆڕین بـۆ گۆشـەی نیـوە تیرەیـی، بەهـۆی لیکـدانی پـلەکە بە: $\frac{\pi}{180}$. یـان بە پـیچەوانەوە، لە گۆشـەی نیـوەتیرەی بـۆ پـلە، بەهــۆی لیکــدانی پــلەکە بە: $\frac{180}{\pi}$. لەم ویـنەی خـوارەوە[57] زۆر باشـتر لەو شیکردنەوەی سەرەوە تیدەگەین.

Degrees vs. Radians



[57] Math. better explained. Xalid Azad.

سێگۆشەکان

Triangles

سێگۆشە (سێ لا)، بریتییە لە یەکێک لە شێوە ئەندازەییە چەند لایە هەرە باوەکان، کە دەتواندرێت بە سێ خاڵی لێک جیاواز (Distinct)[58] بکێشرێت بە هۆی ڕاستەهێڵییەوە، واتە لە ئاهووتەیەک[59](Space) سێ خاڵ دابنێین، هەر دووخاڵێک بەهۆی ڕاستەهێڵەوە بەیەک دەگەیەنین بە شێوەیەک ئەو ڕووبەرەی دەکەوێتە ناوەوەی، تەنیا بە سێ خاڵ دەور درابێت و نەکرابێتە دووبەش. هەژمارکردنی ڕووبەری سێگۆشە، بەهۆی کێشانی لاکێشەیەک بە دەوری سێگۆشەکە، یەکێکە لە ڕێگاکان، واتا سێگۆشەکە بخەینە ناو لاکێشەیەک. یان ئەگەر یەکێک لە لایەکانی سێگۆشەکە بە بناغەکەی-بنچینە (base) دابنێین، ئەوە ڕووبەر دەکاتە نیوەی بناغە جارانی بەرزییەکە، واتە: $Area_{triangle} = \frac{1}{2}\, h \times b$

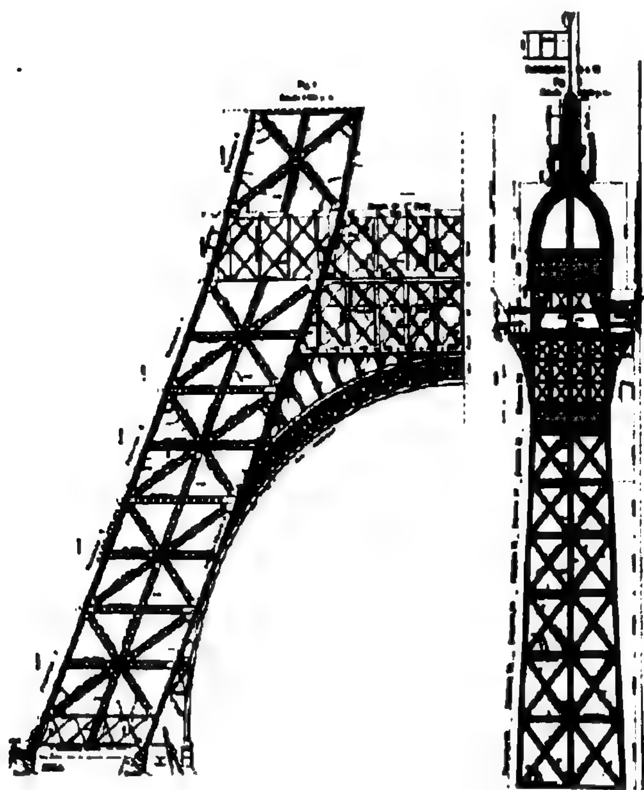
سێگۆشەزانی یەکێکە لە پایاکانی بیناسازی، بە تایبەت بۆ ئەندازیاران لە دروستکردنی پرد و دیوار و باڵەخانەکان، کە تێدا لە شتی زۆر ئاڵۆزدا ڕۆڵێکی گرنگ دەبینێت و کارەکانمان ئاسان دەکاتەوە.

---

58 وشەی "distinct"بۆ دانە (element) بەکاردێت. وشەی "disjoint" بۆ کۆمەڵە (set) بەکاردێت.

59 "ئاهووتە" وشەیەکی کوردییە بەرامبەر بە "space" ی ئینگلیزی و "فەزا" ی عەرەبی بەکارمان هێناوە.

جــگە لەمـــانەش، یەکێــک لە بیـــردۆزە هەرە ناودارەکـــان لەســـەر بنچینــەی سێگۆشـــەوە دامەزراوە، ئەویــش "بیــردۆزی فیســاگۆرس" لە هەمــبەر سێگۆشەیەک کە گۆشەیەکی پلە 90 هەیە.



جۆرەکانی-پۆلێنکردنی سێگۆشە

Types of triangle

لە سێگۆشەزانیدا، چەند جۆرێکی سێگۆشەمان هەیە، ئەو سێگۆشەی ئێمە باسی دەکەین، بریتییە لە سێگۆشەیەک کە کۆی گۆشەکانی ناوەوەی دەکاتە 180 پلە[60]. ئەوەشی وادەکات باس لە جۆری سێگۆشەکان بکەین و جیاوازی لە نێوانیان بکەین، بریتییە لە درێژی لایەکانی و گۆشەکانی.

پۆلێنکردنی سێگۆشەکان بە پێی درێژی لایەکانی:

1- سێگۆشەی سێ لا یەکسان (Equilateral triangle): ئەو سێگۆشەیە کە درێژی هەر سێ لایەکەی وەک یەکن-جووتن، واتە یەکسانە. کە هەر گۆشەیەکی دەکات 60 پلە.

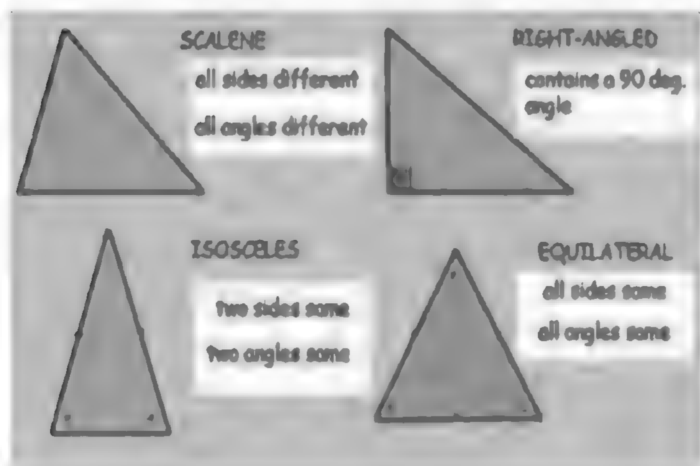
2-سێگۆشەی دوولا یەکسان (Isosceles triangle): ئەو سێگۆشەیە کە درێژی تەنیا دوولایەکەی وەک یەکن-جووتن.

3-سێگۆشەی گۆشە وەستاو (Right angle triagle): ئەو سێگۆشەیە کە گۆشەیەکی پلە 90 هەیە.

---

60 مەبەست لەمە کە کۆی گۆشەکانی ناوەوەی دەکاتە 180، لەبەر ئەوەیە کە سێگۆشەمان هەیە کە کۆی گۆشەکانی ناوەوەی زیاترە لە 180 پلە، هەشمانە کەمترە لە 180. کە لە بابەتەکانی دواتر باسی لێوەدەکرێت.

4-سێگۆشـــەی جیـــالا (Scalence triangle): ئەو سێگۆشـــەیە کە درێـژی هـیچ لایەکـی وەک ئەوی تـر نیـیە-جـووت نیـیە، واتە هەر لایەکـی درێژییەکـی جیـاوازی لەوی تـر هەیە. سێگۆشـەی گۆشـە وەسـتا بـارێکی تایبەتە لە سێگۆشەی جیالا.



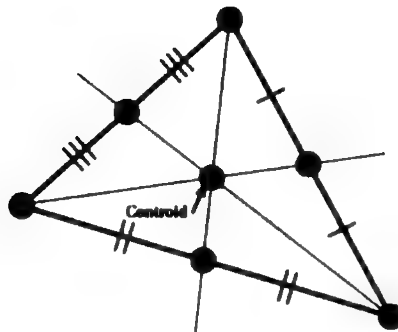
سێگۆشـــەزانی لە شارســـتانییەتی میصـــر ســـەرئاو کەوت، بەهۆکـــاری دروســـتکردنی هەرمەکـــانی میصـــر و نەخشـــاندنی بتەکـــان لە بەردەکـــان. لەگەڵ ئەمەش، زانـــا میصـــرییەکان زۆر بیریـــان لە لایەنـــی پەتـــی (Abstract)ی شـــتەکان نەدەکـــردەوە، لای ئەوان، بەکارهێنانیـــان گرنگتـــرین شت بووە.[61]

[61] وەرگێڕ.

چەقی سێگۆشە

The center of a triangle

چەنـــدین ڕێگـــا هەن بـــۆ ئەوەی بـــزانین چەقـــی سێگۆشـــەیەک بەوردی دەکەوێـــتە کـــوێ. یەکێـــک لە ڕێگاکـــان، ئەوەیە: گەورەتـــرین بـــازنە بکێشـــی لە نـــاو سێگۆشـــەکە، ئەو خـــاڵەی دەبێـــتە چەقـــی بـــازنەکە، دەبێـــتە چەقـــی سێگۆشـــەکەش. یـــانیش، چەقـــی بـــازنەیەک، کە چێـــوەی بـــازنەکە بە هەرســـێ ســـەری سێگۆشـــەکە تێـــپەڕ دەبێـــت. یەکێکـــی تـــر لە ڕێگاکـــان، بـــریتییە لە دەســـت نیشـــان کردنـــی ناوەڕاســـتی هەر یەک لە ســـێ لایەکەی سێگۆشـــەکە، دواتـــر کێشـــانی ڕاســـتەهێڵێک لە کـــوژبنی-ســـوچ هەر سێگۆشـــەیەک بـــۆ ئەو لایەی دەکەوێـــتە بەرامـــبەر کـــوژبنەکە، بەم شـــێوە ســـێ ڕاســـتەهێڵ دەکێشـــن، ئەو ســـێ ڕاســـتەهێڵە، لە کـــام خـــاڵ پێکگەیشـــتن، ئەوە ئەو خـــاڵە دەبێـــتە چەقـــی سێگۆشەکە. وەک لە وێنەی خوارەوە زیاتر ڕوونە.



لێـــرە جیـــاوازی دروســـت نابێـــت کە سێگۆشـــەکە لە کـــام جـــۆری سێگۆشەکانە، ئەم شێوازە-میتۆدە بۆ گشتیان ڕاستە بە شێوەیەکی گشتی.

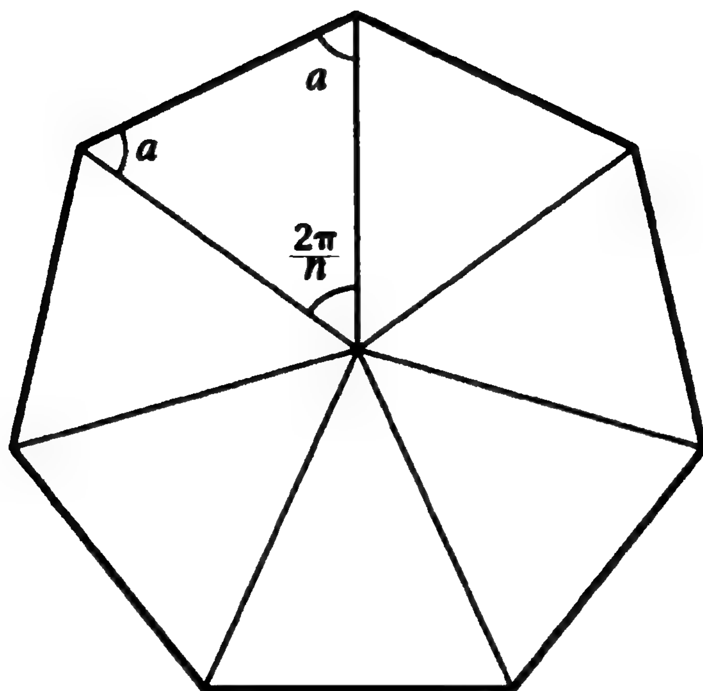
چەندلایەکان

Polygons

لە دێـــر زەمـــانەوە، چەنـــد لایەکـــان بەکارهـــاتوون بـــۆ ڕازانـــدنەی باڵەخانەکـــان و کـــارە هونەرییەکـــان، وەک: سێگۆشـــەکان و لاکێشـــەکان. چەنـــد لایەکـــان، بـــریتیین لە شـــێوەیەکی ڕووتەختـــی داخـــراو بە ســـێ پـــارچە ڕاستەهێڵ یان زیاتر (یان چەند گۆشەیەکی هەیە).

چەنـــد جۆرێـــک لە چەنـــد لامـــان هەیە، ئەوانەی ڕێکـــن و ئەوانەی ڕێـــک نـــین. چەنـــد لای ڕێـــک، ئەو چەنـــد لایەیە کە درێـــژی هەمـــوو لایەکـــانی یەکســـانن، وەک: پێـــنج لا (Penatgon)، شـــەش لا (Hexagon)، حەوت لا (Hebtagon)، هەشـــــت لا (Octagon) و تـــــا دوایـــــی. پێـــــنج لا (Pentagon) کە 5 لای ڕێکـــی هەیە، دەتوانـــدرێت بکێشـــرێت بەهـــۆی چەنـــد سێگۆشـــەیەکەوە کە دوو گۆشـــە بەیەک دەگەن، کە ناســـراوە بە سێگۆشـــەی دوولا ڕێـــــک (Isosceles) کە لـــــووتکەی (Peak) هەر سێگۆشـــــەیەک بە یەکتـــردەگەن لە چەقـــی شـــێوەکە، وەک لە وێـــنەکەدا دیـــارە. لەبەر ئەوەی دەوری ئەو چەقەی دروســـت بـــووە دەبێـــت 2π بێـــت ، ئەوە گۆشـــەی لـــوتکەی هەر سێگۆشـــەیەک دەکـــاتە: $\frac{2\pi}{n}$ کاتێـــک n بـــریتییە لە ژمـــارەی سێگۆشـــەکان یـــان لایەکـــانی چەنـــد لایەکە. بـــابەتێکی تـــر، کە لە مەڕ سێگۆشـــەکان دەیـــزانین، ئەوەیە کە کـــۆی گۆشـــەکانی سێگۆشـــە دەکـــاتە π وە دەزانـــین کـــــــە کـــۆی گۆشـــە یەکـــــسانەکان دەکـــاتە $2a$ ، واتـــــە $2a = \pi - (\frac{2\pi}{n})$.

هەروەهـــا ئەو بـــڕە $2a$ بـــریتییە لە نرخـــی هەر گۆشـــەیەکی نـــاوەکی (Internal)ی چەنـــد لایەکـــی ڕێـــک، وەک: پینتـــاگۆن (Pentagon) کاتیـــک n=5، ئەوە کۆی گۆشەی ناوەکییەکانی دەکاتە: $\frac{3\pi}{5}$.



هاوشێوەیی

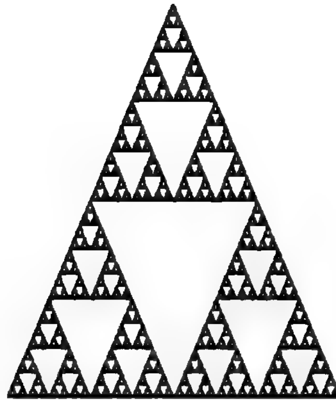
Similarity

دوو شت یان دوو شێوە (Shapes) پێیان دەوترێت هاوشێوەن، ئەگەر هات و ئەو دوو شتە لە ڕووی شێوەوە وەک یەکتر بن-هەمان پێکهاتەیان هەبێت. ئەمە یەکێکە لە ڕێگاکان، چونکە چەندین ڕێگای تر هەن بۆ ئەوەی بریاربدەین دوو شت یان دوو شێوە (Shapes) هاوشێوەن یان نا. لە ئەندازە، ئەگەر لەسەر سێگۆشەکان بدوێن، ئەگەر هەرسێ گۆشەی سێگۆشەیەک یەکسان بێت بە گۆشەکانی ناو سێگۆشەکەی تر، ئەوە هاوشێوەن، یان ڕێژەی درێژی نێوان دوو لای سێگۆشەک یەکسان بێت بە ڕێژەی درێژی دوو لای سێگۆشەکەی تر. کاتێک لە شێوە یان شتە ئەندازەییەکانی تر ورد دەبینەوە، وەک چەندلایەکان (Polygons) و چەماوەکان (Curve)، ئەوە شتێکی تر هەیە دەبێت لێیەوە بریار بدەین ئەو دوو شتە هاو شێوەن یان نا، وەک: دوو چەندلایەکی ڕێک، هاوشێوە دەبن ئەگەر بێت و هەمان ژمارە لایان هەبێت. لێرە گەورەیی و بچوکی شێوەکان گرنگ نییە، بەڵکو جەوهەری شێوەکە گرنگە.

چەمکی هاوشێوەیی، یان جێگۆرکێی هاوشێوەیی (Similarity transformation) بەکاردێن بۆ وەسفکردنی پێوانەکردار (Scaling operation) کە شتێک جێگۆرکێی پێکراوە بۆ شتێکی هاوشێوە. "جێگۆرکێی هاوشێوەیی یان لێکچوو" بەجۆرێکە کە هیچ گۆرانکارییەک لە شێوەی ئەو شتەی هەمانە دروست ناکات، تەنیا لە

ڕووی بـــڕەوە نەبێـــت. واتە ئەگەر چوارگۆشـــەیەک کە درێـــژی لایەکـــانی 5 بێـــت، بمانەوێـــت گەورەتـــری بکەیـــن، ئەوە بـــۆ هەر لایەک چەنـــد یەکە زیـــاد بکەیـــن، ئەوە بـــۆ لایەکـــانی تـــریش بە هەمـــان شـــێوە، ئەمەش واتـــا لە ڕووتەختـــی دیکـــارتی (Cartesian coordinates) لە کـــاتی جێگـــۆڕکێ، ســـەرجەم خاڵەکـــانی ئەو ڕووتەخـــتە ئیقلیـــدییە جـــارانی هەمـــان ژمـــارە، واتە هەمان فاکتەر دەکرێت.

ئەم وێنەی خوارەوە بریتییە لە سێگۆشەی سیرپنسکی[62].



[62] سێگۆشـــەی سیرپینســـکی (Sierpinski triangle) جۆرێـــک فراکتـــاڵە، کە لە سێگۆشـــەیەکی ڕێـــک یـــان لایەکســـان دروســـت دەبێـــت. ســـەرەتا سێگۆشـــەیەکی لایەکســـان لە ناوەڕاســـتی سێگۆشـــەی یەکەم جیـــا دەکـــرێتەوە، پاشـــان ئەم کـــارە لەســـەر هەمـــوو سێگۆشـــەکان دووبـــارە دەکـــرێتەوە. نـــاوی ئەم سێگۆشـــەیە، لە نـــاوی ماتمـــاتیکزانی پۆڵەنـــدایی "واکـــلام سیرپینســـکی" وەرگیـــراوە، بەڵام چەنـــدین ســـەدە بەر لە کارەکـــانی سیرپینســـکی، ئەم سێگۆشـــەیە، وەکـــو شێوازێک بۆ ڕازاندنەوە کەڵکی لێ وەردەگیرا.

جووتبوون

Congruence

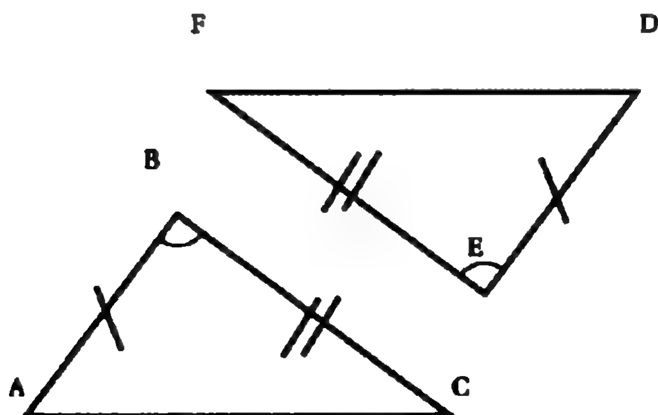
دوو شــت پێیــان دەوترێــت جووتــدەبن، ئەگەر هــاتوو ئەو دوو شــتە لە شــێوە؛ هەمــان پێکهــاتە و پێوانیــان هەبێــت. چــۆنییەتی هەڵکەوتنــی لە بۆشــایی(Space) گرنــگ نیــیە. واتــا دوو سێگۆشــە کە درێــژی لایەکــانی و گۆشــەکانیان هەمــووی وەک یەکە، بەڵام وەک یەک لە بۆشــایی دانەنــراون؛ ئەوە جــووت دەبــن. نمــونە: دوو بلــۆکی وەک یەک، ئەگەر بلۆکێکیــان بە بــاری ســتونی دانــێن و ئەوەی تــر بە بــاری درێــژی، ئەوە ئەو دوو بلــۆکە جــووت دەبــن، گرنــگ ئەوەیە هەردووکیــان بلــۆکن و پێکهــاتە و پێوانیــان هەمــوو شــتێکیان وەک یەکتــرە، بە واتــایەکی تــر، ڕێــژەی نێــوان هەر پێکاهــاتەیەکی شــتەکە یــان شــێوەکە-جێگــۆڕکێیەکە بــۆ شــێوەکەی تــر، دەکاتە 1 (Scaling factor)[63] .

لە وێــنەدا، دەکرێــت دوو شــتی لەم شــێوە وێــنەدانەوەی یەکتــر بــن. دوو سێگۆشــە بەگشــتی جووتــدەبن ئەگەر بێــت و هەر یەکێــک لەمــانەی دێــن ڕووبــدات، ئەوانــیش: درێــژی هەر ســێ لایەکــانی یەکســان بــن؛ درێــژی دوو لە لایەکــانی و گۆشــەی نێــوان ئەو دوو لایە لە هەردووکیــان وەک یەک بێــت؛ یــان درێــژی یەکێــک لە لایەکــان و ئەو گۆشــەی کە گۆشــەکانی تــر

---

[63] ڕێــژەی جێگــۆڕکێ (Scaling factor)،واتە ئەگەر لە سێگۆشــەی یەکەم گۆشــەیەکم هەبێــت پــلەکەی 90 بێــت، ئەوە دەبێــت لە سێگۆشــەکەی تــرت گۆشــەیەکی پــلە 90 هەبێــت، ئەمەش دیارە کە ڕێژەی نێوانیان دەکاتە یەک : $\frac{90}{90} = 1$.

تەواودەکـات، یەکســان بێـت. بـۆ هەریەکێـک لەم ســێ پێـوەرە، بەســە بـۆ ئەوەی بڕیار بدەین دوو سێگۆشە جووت دەبن یان نا.



بــابەتی جــووت بــوون لە ئەنــدازەدا، یارمەتیمــان دەدات لە دۆزیــنەوەی ڕووبەر، قەبــارە،... بــۆ هەنــدێ لە شــێوەکان. کاتێــک لێکــۆڵینەوە لە هەمــبەر شــێوەیەک گــران و ســەختە، ئەوە لە ڕێــگەی شــێوەیەکی تــری ئەو شــتەی هەمــانە، کە لە گەڵ شــێوە ڕەســەنەکەی خۆمــان جــووت دەبێــت، کارمــان ئاســانتر دەکــات. وەک چــۆن لە هەژمــارکردنی π لە نــاو بــازنەیەک چەنــد لایەک دەکێشین، کە ئەو چەند لایە پێکەوە جووت دەبن...

بیردۆزی فیساگۆرس

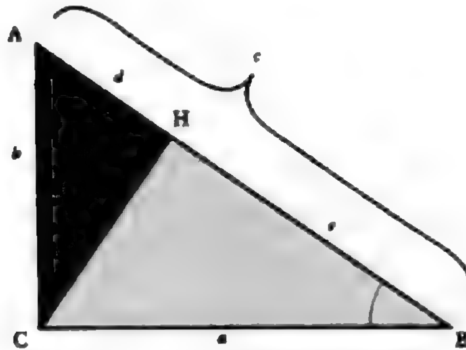
Pythagoras's theorem

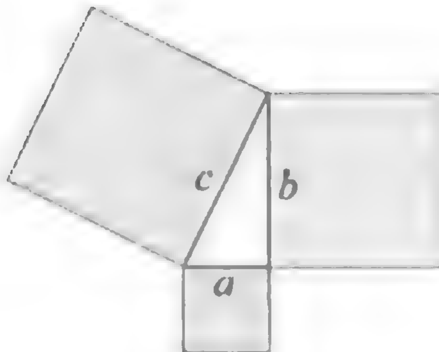
بیرۆدۆزی فیساگۆرس، یەکێک لە سیما هەرە دیارەکانی بیرکاری. قوتابی لە قوناغی ناوەندی ئاشنای ئەو بیردۆزە دەبێت. بیردۆزی فیساگۆرس، لای زۆرێک لە بیرکاریزانەکان، بریتییە لە جوانترین بیردۆزەکان، کە بە ڕادەیەکی زۆر سەرسامی پێوە دیارە. ئەم بیردۆزە پەیوەندییەکە لە نێوان گۆشە و درێژی لایەکانی سێگۆشەیەکی گۆشە وەستا، واتا سێگۆشەیەک کە گۆشەیەکی پلە 90 هەبێت. سەلماندنی ئەم بیردۆزەش لە ڕێگەی کێشانی سێگۆشەیەکی هاوشێوە (Similar) لە ناو سێۆگشەکە، وەک لە وێنەکە دا دیارە، یانیش لە ڕێگەی ڕووبەرەوە لە دووجاکردنی هەر سێ لایەکەی سێگۆشەکە.

لە بنچینەدا ئەم بیردۆزە لە پێش یۆنانییەکان و فیساگۆرس بوونی هەبووە، کە لە شارستانییەتی بابلییەکان؛ ئەوان کاریان پێ کردووە، بەڵام لە کۆتاییەکانی سەدەی شەشەمی پێش زاین، گریکەکان کردیان بە ناوی خۆیانەوە[64]. ئەم بیردۆزە گرنگییەکی زۆری هەیە لە ئەندازە، فیزیا، وە

[64] ئەم بیردۆزە چەندین سەلماندنی هەیە، پتر لە 300 سەلماندن، کە ڕێگاو شێوازی هەمەجۆر هەن. سادەترینیان بریتییە لە ڕێگەی کێشانی چوار لایەکی ڕێک لە ناو چوار لایەکی گەورەتر، لەم ڕێگەیەوە دەگەین بە پشتراستی ئەم بیردۆزە. ڕاستییەک سەبارەت بە سەلماندنەکەی، ئەویش ئەوەیە بابلییەکان دەیانزانی ئەم بیردۆزە ڕاستە، بەڵام نەیاندەزانی بۆچی ڕاستە؟ ئەمەپرسیار بوو لایان، بەڵام وەک ڕوونە چەمکی سەلماندن لە

تەنــانەن تەوەرەی پۆتــانی دوو ڕەهەنــدی لەســەر ئەم بیــردۆزەیە بنــاتنراوە. پەیوەنــــدییەکی تــــۆکمەش هەیە لە نێــــوان ئەم بیـــردۆزە و نەخشـــــە سێگۆشەییەکان لە چۆنییەتی دۆزینەوەی گۆشە.





یۆنانییەکــانەوە دەســـتی پێکــرد، هەر بــۆیە دەشــێت بەهــۆی ســەلماندنی ئەم بیــردۆزەوە، یۆنانییەکان بە موڵکی خۆیانی بزانن.

ساین، کۆساین و تانجێت

Sine, cosine, and tangent

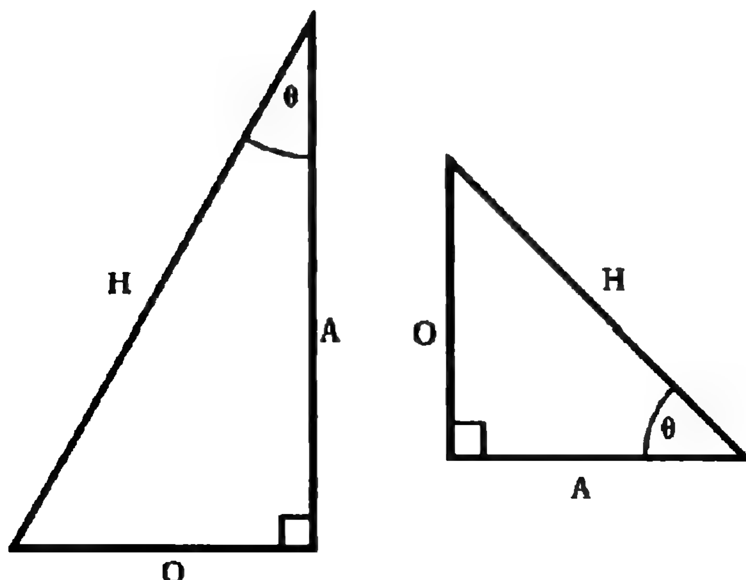
سێگۆشـــەی گۆشـــە وەســـتا، بـــواری ئەوەمـــان دەدات کە لە پەیوەنـــدی گۆشـــە و درێـــژی لایەکـــانی زیـــاتر تێـــبگەین، هەر بـــۆیە لە بیرکـــاری ئەمـــانە بە نەخشـــــە سێگۆشـــــییەکان ناســـــراون، کە ســـــەرەکیترینییان بـــــریتیین لە نەخشەکانی ساین، کۆساین و تان.

بـــۆ ئەوەی پێناســـــەی ئەو نەخشـــــانە بکەیـــن، ســـــەرەتا وا دانـــێن گۆشـــــەیەکمان هەیە θ، کە ئەم گۆشـــــە پـــــلەکەی 90 نیـــیە. ئەو گۆشـــــە دەکەوێـــــتە نێـــــوان دوو لا H و A، کە ئە دوو لایە ســـــەرێکی هاوبەشـــــیان هەیە (وەک لە وێـــنەکە دیـــارە). ئەو دوو لایەش پێـــان دەوترێـــت: هاوســـێ-دیـــوار بە دیـــوار. لەســـــەرەوە باســـی دوو لامـــان کـــرد، لای ســـێیەم پێـــی دەوترێـــت لای بەرامـــبەر (دژ) کە نـــاوی O مـــان لـــێ نـــاوە. ئەو ســـێ نەخشـــەیە: ساین، کۆساین و تانجێت بەو شێوە پێناسەکراوە:

$$sin(\theta) = \frac{O}{H} \quad ، cos(\theta) = \frac{A}{H} \quad ،tan(\theta) = \frac{O}{A}$$

لەبەر ئەوەی هەر دوو سێگۆشـــــەیەکی گۆشـــــە وەســـــتاو، لەگەڵ گۆشـــەی θ وەک لەبەرگیـــراوەی یەکتـــر وان، ئەوە نەخشـــەکان هەر هەمـــان وەڵامـــان لێـــان دەســـت دەکەوێـــتەوە بـــێ گوێـــدانە قەبـــارەی سێگۆشـــەکە، وە چونکە $\frac{O}{A} = \frac{\frac{O}{H}}{\frac{A}{H}}$ ، لەمەوەش دەبینین کە:

$$tan(\theta) = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)}.$$



نەخشــە سێگۆشــەییەکان وێنەکانیــان شــێوە شــەپۆلە، ئەمەش گرنگــی هەیە لە بــواری فیزیــا. ســاین لە بنەڕەتــدا بە واتــای کەوانە دێــت، وە کۆســاین هەر لە ســـاینەوە ســـەرچاوەی گرتـــووە co-sine واتە: تەواوکەری ســـاین (complement of sine).

سێگۆشەسازی

Triangulation

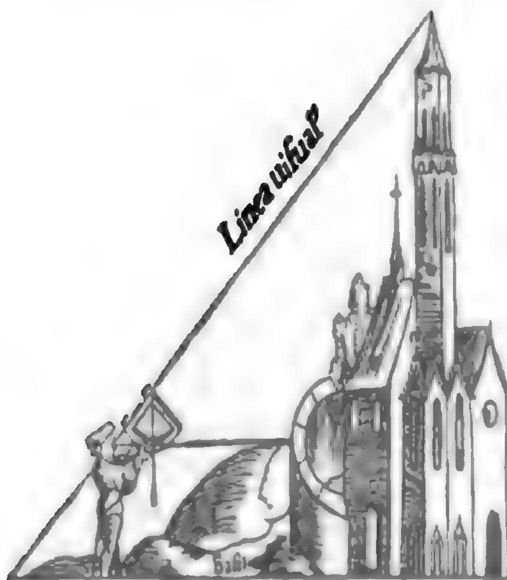
سێگۆشەسـازی، یەکـێکە لەو میتـۆدانەی کە بەکاردێـت بـۆ دۆزینـەوەی هەمـوو پێکهاتەکـانی سێگۆشـەیەکی گۆشـە وەسـتاو، بەهـۆی تەنیـا دوو دراو، ئەویـش درێـژی یەکێـک لە لایەکـان و گۆشـەیەک. دواتـر لە رێـگەی ئەم دوو دراوە، تەواوی دراوەکـانی تـر دەدۆزیـنەوە بە بەکارهێنـانی نەخشـە سێگۆشەییەکانی ساین، کۆساین و تانجێت.

وادانـێ شـازادەیەک دەیەوێـت بەرزی نێـوان پەنـجەرەی ژووری خەوتنـی شـاژنەکەی و زەوی بزانێـت، بـۆ ئەمەش، پێویسـتە قـژی کـچەکە چەنـد درێـژ بێـت بـۆ ئەوەی بگـاتە سـەر زەویـیەکە؟ شـازادە لە دووری l وەسـتاوە لە کۆشـکەکە، کە گۆشـەی نێـوان بـنکەی کۆشـەکە و پەنـجەرەکە بریتییە لە θ.

وا دانـێ کە کۆشـکە بە شـێوەیەکی سـتونی رێـک دروسـتکراوە، وە شـازادە دووری نێـوان خـۆی و کۆشـکەکە دەزانێـت، کە بە کەرەسـتەیەک-ئامێرێـک (Protactor) گۆشەکەشـی دۆزیـوەتەوە. شـازادە دەیەوێـت بزانێـت پەنـجەرەی کـچەکە چەنـد لە زەویـیەوە بەرزە، بـۆیە بە بەکارهێنـانی ئەو دوو دراوە، یەکەم: دووری شـازادە لە کۆشـکەکە. دووەم: گۆشـەی نێـوان شـوێنی شـازادە بە گـوێرەی پەنـجەرەکە. بەهـۆی ئەم دوو دراوە و

بەکارهێنـانی یاسـای tan، دەتـوانین بەرزی پەنـجەرەی کـچەکە بـدۆزینەوە کە بەرزییەکە بریتییە لە d، بەم شێوە:

$$tan(\theta) = \frac{d}{l} \text{ ، وە } d = l \times tan(\theta)$$



$$d = l \times tan(\theta)$$

دروسـتکردنی ئەو ئـامێرە یـان ئەو گۆشـە پێـوە زۆر سـەخت نیـیە، بەهۆی چەند شتێکی سادەوە دەتوانی دروستی بکەی.

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان

Trigonometric identities

هاوئەنجـــامە سێگۆشـــەییەکان، بـــریتین لەو هاوکێشـــانەی کە نەخشـــە سێگۆشـــەییەکانی وەک: ســـاین، کۆســـان و تـــانی لە خۆگرتـــووە، ئەم هاوکێشـــانە بە راســـتی دەمێـــنەوە هەرچەنـــد گۆڕانکـــاری لە بەهـــای گۆڕاوەکانیـــدا θ بکرێـــت. گریمـــان سێگۆشـــەیەکی گۆشـــە وەســـتاومان هەیە، تەنیشـــتەکەی دەکـــاتە A، بەرامـــبەرەکەی دەکـــاتە O و ژێیەکەشـــی بـــریتییە لە H، ئەوە بە پێی بیردۆزی فیساگۆرس:

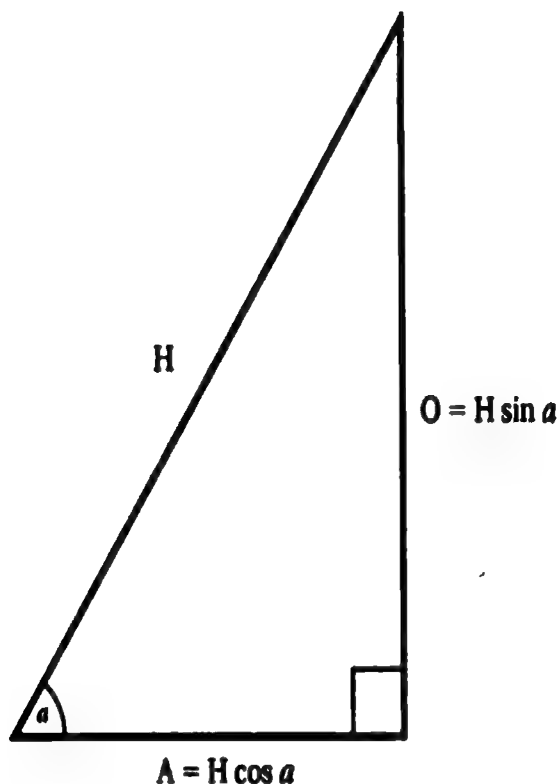
$$O^2 + A^2 = H^2$$

پاشـــان ئەگەر بێـــت هەردوو لای ئەم هاوکێشـــەیە دابەشـــی H^2 بکەیـــن، ئەوە دەبینین کە:

$$\frac{O^2}{H^2} + \frac{A^2}{H^2} = 1 \ OR \ \left(\frac{O}{H}\right)^2 + \left(\frac{A}{H}\right)^2 = 1$$

لەبەر ئەوەی کە $sin(\theta) = \frac{O}{H} \ \& \ cos\,(\theta) = \frac{A}{H}$ ، ئەوە بە لە جـــێ دانـــانەوەی ئەمـــانە دەگەیـــنە: $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ ئەمە بـــۆ هەمـــوو گۆشـــەیەک θ راســـتە. دیاریشـــە ئەمە کە شـــتێکی بە ســـوودە، کە

پەیوەنـــــدییەکی بە هێـــزە لە نێـــوان یاســـــای فیســـــاگۆرس و نەخشــــە سێگۆشـــەییەکان، هەڵـبەتە بە بـێ یاسـای فیسـاگۆرس ئەمە بـوونی نەدەبـوو. گەر تێبینـــی بکەیـــن، لە یاســـاکە هەر یەک لە ســـاین و کۆســـاین دووجـــان، ئەمەش واتە ئێمە قسە لەسەر شتێکی دەکەین کە چوارگۆشەیە!



ڕێساکانی ساین و کۆساین

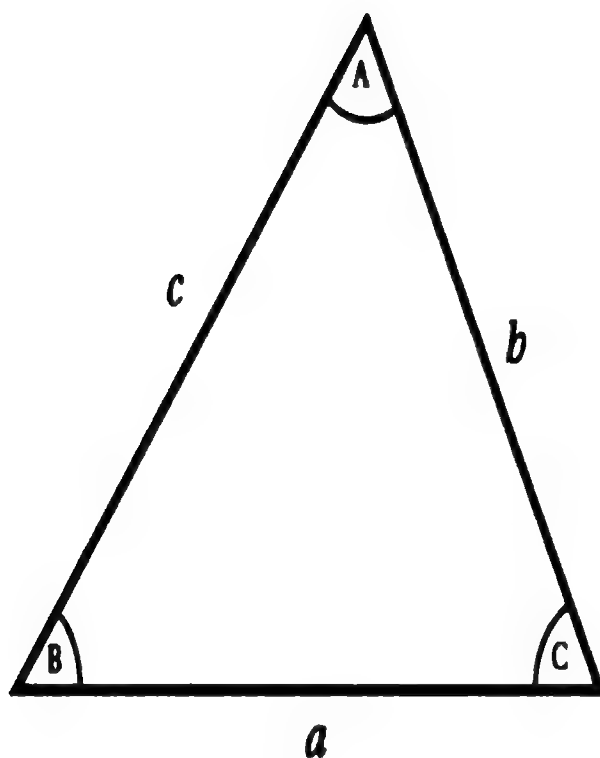
Sine and cosine rules

ئێمە تا ئێستا تەنیا باسمان لە یاساکانی ساین و کۆساین کردووە بۆ سێگۆشەیەک کە گۆشەیەکی پلە 90 هەیە، واتە سێگۆشەی گۆشە وەستاو. بەڵام ڕەنگە یەکێک لەو ئێوە بپرسێت: چی ئەگەر سێگۆشەکەمان سێگۆشەیەکی گۆشە وەستاو نەبوو؟ واتە گۆشەی پلە 90 نەبوو؟ لە ڕاستیدا یاسا بۆ ئەویش هەیە، بۆ دۆزینەوەی هەر یەکێک لە درێژ و گۆشەکانی، ئەگەر مەبەستمان بێت. بۆ سێگۆشەیەک کە لە خوارەوەش وێنەکەی دراوە، ئەمە یاساکەیەتی:

ئەمە یاسای ساین : $$\frac{sin(A)}{a} = \frac{sin(B)}{b} = \frac{sin(C)}{c}$$

یاسای کۆساین ؛ $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$$

ئەگەر c نرخی 90 بێت، ئەوە $cos(90) = 0$ ، دیارە ئەگەر ئەمەش ڕوویدات لە یاسای کۆساینەوە دەگەینەوە بە یاسای فیساگۆرس!


A
c
b
B
C
a

ڕیسای گۆشەی دووهێندە

Double angle formulae

ڕیسـای (فۆرمـولەی) گۆشـەی دووهێـندە، بـریتییە لەو ڕیسـایەی کە ڕێگامـان دەدات گۆشـەیەک بکەیـن بە دوو بەشـەوە، کە بە جیـا ئـیش لەسـەر هەر گۆشـەیەکیان بکەیـن بە بەکارهێنـانی نەخشـە سێگۆشـەییەکانی سـاین و کۆسـان. یەکێـک لە سـوودەکانی ئەو ڕێسـایە ئەوەیە، هەر بەشـە گۆشـەک لە نێـوان 0 و 90 پـلە دایە. ئەو ڕێسـایە سـەرچاوەی پەیـدابوونی بەهـۆی ئەوەی کاتێـک لە نـاو سێگۆشـەیەک بە شـێوەیەک؛ ڕاسـتەهێڵێک لە یەکێـک لە گۆشـەکانەوە دەکـێش بـۆ لایەکـی بەرامـبەری گۆشـەکە، کە ئەو ڕاسـتەهێڵە گۆشەکە لەت دەکات. ڕێساکانیش بەو شێوەن:

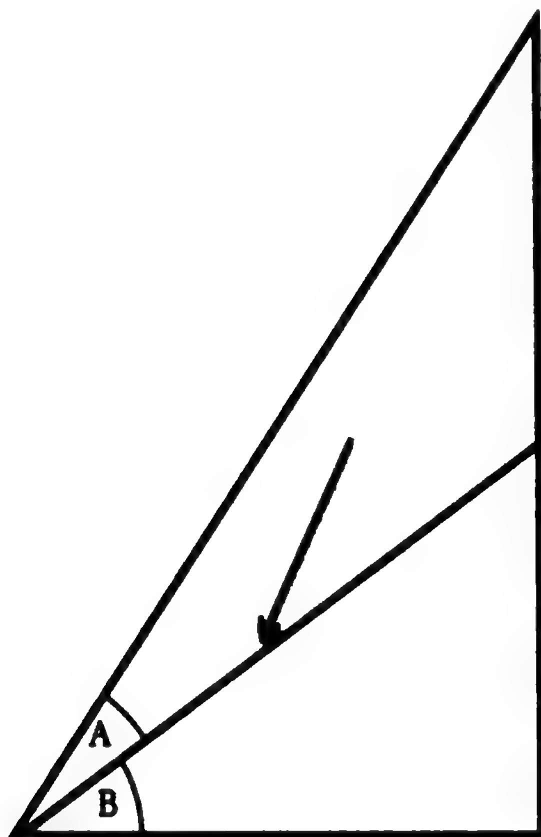
$$sin(A + B) = sin(A)\, cos(B) + sin(B)\, cos(A)$$

$$cos(A + B) = cos(A)\, cos(B) + sin(A)\, sin(B)$$

ئەگەر A و B هەردووکیان بەیەکسان دانێن، ئەوە:

$$sin(2A) = 2\, sin(A)\, cos(A)$$

$$cos(2A) = cos^2 A - sin^2 A = 1 - 2\, sin^2 A = 2\, cos^2 A - 1$$



ڕاستەهێڵەکە، گۆشەکەی لەت کردییە بۆ دوو گۆشە A و B.

ناساندنی هاوجێی-هاوچەشنی

Introducing symmetry

زۆر کەس وا بیردەکــاتەوە کە هەنــدێک وێــنە هەن، چ دەســتکرد چ لە سروشــت، چ پەیوەنــدییەکی بە بیرکــارییەوە هەیە، یــان وەک هەنــدێ جــۆری باڵنــدە. لە بیرکــاری بابەتێــک هەیە پێــی دەوترێــت "هــاوجێی-هاوچەشــن یــان هاوشــان"، کە هەر شــتێک یــا وێــنەیەک پێــی دەوتــرێن هاوچەشــنە ئەگەر هــاتوو شــتەکە یــان وێــنەکە جەوهەرەکەی هەر وەک خــۆی بمێنێــتەوە کــاتێ جێگــۆڕکێی پــێ دەکەیــن. لە ئەنــدازە زانیــدا، جێگــۆڕکێی، بەکاردێــت بــۆ پێناســەکردنی هاوچەشــنی بەهــۆی "گــۆڕینی جێگــا یــان ئاراســتە" بە پاراســتنی درێــژی یەکەکــانی شــتەکە، کە ئەم جێگــۆڕکێیەش وێــنەدانەوەیە. تەوەرەی وێـــــــنەدانەوە (Line of refecltion) لە ئــــــــاهووتەی (Space) دوو ڕەهەندیــدا، بــریتییە لە ڕاســتەهێڵێک، وەیــان ڕووتەخــت لە ئــاهووتەی ســێ ڕەهەندیــــدا، یــــان خولانــــدنەوە (Rotation) بە دەوری تەوەرەکــــان، یــــان بەهــۆی وەرگێــران-کشــانەوە (Translation). ئەگەر جێگــۆڕکێی بەســـەر شــتێک یــان شــێوەیەک بێنــین، کاتێــک شــتەکە جەوهەری خــۆی لەدەســت نەدات لە جێگــۆڕکێیەکە، ئەوە بەو شــتە یــان بە شــێوەکە دەوترێــت جێگیــر-نەگــۆڕ لە ژێرکــرداری جێگــۆڕکێیەکە (Invariant under the transformation). هاوچەشـــنی لە پانتــایی ماتماتیــک ســـوودی زۆرە، کاتێــک هەر شــتێک لە ژێــر کردارێــک دەکرێــت بە هاوچەشــن ســەیری بکەیــن، ئەگەر ئەو شــــتە لە ژێرکــــردارەکە، تایبەتمەنــــدییە ڕەســــەنەکەی خــــۆی

بپارێزێت. ئەمەش زارشتێکی گرنگە کە بەکاردێت لە پێناسەکردنی گرووپەکان و کردارەکان، یان چارەسەرکردنی هەندێک لە کێشە بیرکارییەکان.



راستەهێڵەکە، تەوەرەی وێنەدانەوەیە بۆ شێوەکە.

Translation, rotation, and reflection

کشانەوە، خولاندنەوە و وێنەدانەوە

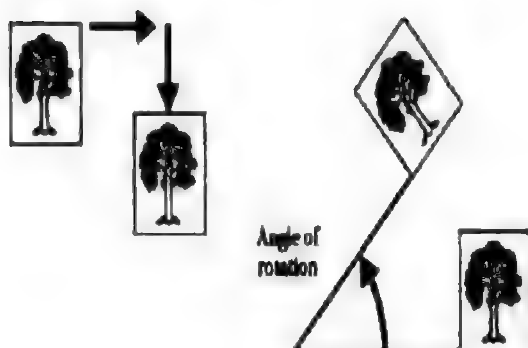
لە ئەندازەزانیـــدا، ســـێ جـــۆر لە هاوچەشـــنیمان هەیە، ئەمـــانە چەنـــد ڕێگـــایەکن بـــۆ جێگـــۆڕکێی شـــتێک بەبـــێ ئەوەی هـــیچ گۆڕنكـــارییەک لە جەوهەری شتەکە ڕووبدات.

کشـــانەوە (Translation): بـــریتییە لەو کـــردارەی کە تێـــدا شـــتێک یـــان وێـــنەیەک دەکشـــێت-دەخزێـــت بـــۆ ئاراســـتەیەکی تـــر، بەبـــێ ئەوەی گۆڕانکـــاری لە گۆشە و درێژی و پانی شتەکە ڕوووبدات، بە شێوەیی هێڵی.

خولانـــــدنەوە (Rotation): بـــــریتییە لەو کـــــردارەی کە تێـــــدا شـــــتێک دەخـــولێنینەوە بە دەوری چەنـــد خاڵێـــک (یـــان خاڵێـــک)ی نەگـــۆڕ-جێگیـــر لە ئـــاهووتەدا-بۆشـــایی، دووبـــارە لەمەش هـــیچ شـــتێک گۆڕانکـــاری بەســـەر نـــایەت لە جەوهەری شـــــتەکە، بەڵکـــــو تەنیـــــا لە ڕووکەش دەگۆڕێـــــت نەوەک لە ناوەڕۆک.

لە پۆتـــــانی دووڕەهەندیـــــدا، وێـــــنەدانەوە (Reflection): بـــــریتییە لە دووبـــــارە کـــــردنەوەی یـــــان بینیـــــنەوەی وێـــــنەیەک یـــــان شـــــتێک بە دەوری تەوەرەی وێـــنەدانەوەکە. وەک چـــۆن ئـــێمە خۆمـــان لە ئـــاوێنەدا دەبینـــین. وێـــنەدانەوەش، بە دەوری تەوەرەیەک دەبێـــت لە ئـــاهووتەی دوو ڕەهەنـــدی، لە ئـــاهووتەی ســـێ ڕەهەنـــدی، ڕووتەخـــت ڕۆڵـــی وێـــنەدانەوەکە دەبینێـــت. وەک: بـــاڵێکی پەپـــولە، وێـــنەدانەوەی بـــاڵەکەی تریەتـــی، وە ئەگەر خەتێـــک بە

ناوەراستی پەپولەکە بکێشین، ئەوە ئەو راستەهێڵە دەبێتە راستەهێڵی وێنەدانەوەی نێوان هەردوو باڵی پەپولەکە. لە هەموو ئەو پرۆسانەدا، هیچ شتێک لە درێژی و پانی و یان گۆشەی شتەکان ناگۆرێت.





چەند ڕووەکان

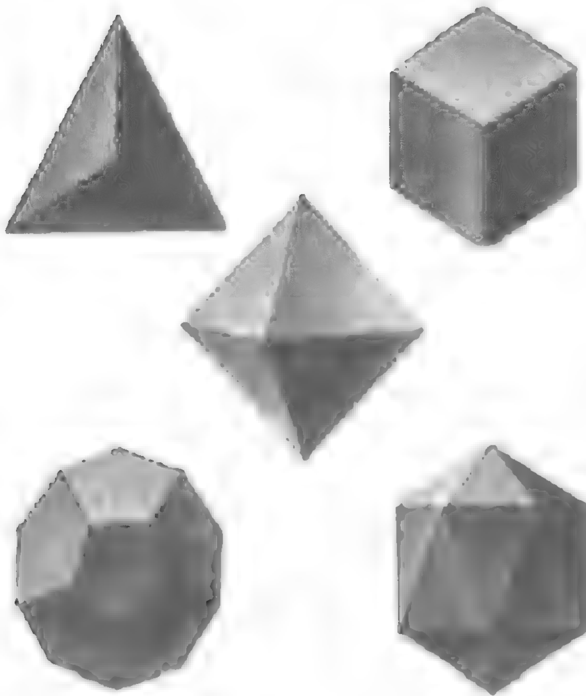
Polyhedra

ئێمە لە ئاهووتەی دوو ڕەهەندی، چەند لایەکانمان هەبوو. لە ئاهووتەی سێ ڕەهەندی، چەند ڕووەکانمان هەیە. لە ئاهووتەی سێ ڕەهەندی ئێمە سێ چەمکمان هەیە: درێژی، پانی و بەرزی. بۆ ئەو شێوانەی دوو ڕەهەندین، ڕووبەرمان (Area) هەیە. بۆ ئەو شێوە و شتانەی سێ ڕەهەندین، قەبارەمان (Volume) هەیە کە دەوردراوە بە ڕووتەختەکان و چەماوەکان. وەک چۆن چەندلای ڕێکمان هەیە، بەهەمان شێوە چەند ڕووەکان؛ شێوەی ڕێک و نارێکیان هەیە. بۆیە خێزانێک لە چەند ڕووی ڕێکمان هەنە، کە ناسراون بە تاوپرە ئەفلاتونییەکان (Platonic solids). چەند ڕووەکان تەنێکی سێ ڕەهەندین، کە لە چوار ڕوو یان زیاتر پێکدێت، کە تێدا تەنیا لایەکان یەکتر دەبڕن.

- چوار ڕوو (Tetrahedron): چوار ڕووی هەیە، هەر ڕووەک سێگۆشەیەکی سێ لایەکسانە.
- شەش پاڵوو (Cube): شەش ڕووی هەیە، هەر ڕووەکی چوارلایەکی ڕێکە.
- هەشت ڕوو (Octahedron): هەشت ڕووی هەیە، هەر ڕووەکی بریتییە لە 5 لای ڕێک (Pentagon).
- دوانزە ڕوو (Dodecahedron): دوانزە ڕووی هەیە، هەر ڕووەکی بریتییە لە سێگۆشەی سێ لا یەکسان.

- بیســــت ڕوو (Icosahedron): بیســــت ڕووی هەیە، هەر ڕووەکی بریتییە لە سێگۆشەی سێ لا یەکسان.

بە دڵنیـایی، زۆر جـۆر و شـێوەی تـری چەنـد ڕوومـان هەیە، بەجۆرێـک زیاتر لە ژمارەی چەند لایەکان.



ڕیزبەندی-کاشییە بەندکردن

Tessellations

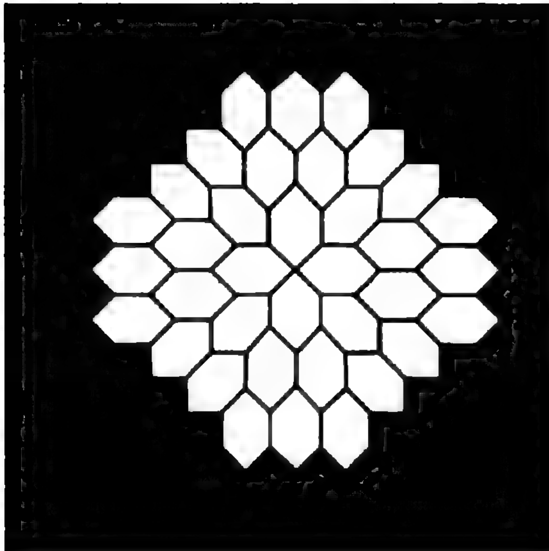
شـێوە دوو ڕەهەنـدییەکان، پێـان دەوتـرێن ڕیزبەنـدی-کاشـی بەنـدکردن (Tessellate) ئەگەر هــاتوو توانــدرا ئەو شــێوانە پــێکەوە بلکێنــدرێن بە شــێوەی لابەلا بــێ ئەوەی هــیچ بۆشــاییەک لەم پیانووســانە[65] دروســت بێــت لە کــاتی ڕووپۆشــکردنی نــاوچەکە یــان نــاوچەیەک. لەم ڕیزبەنــدی کــردنە، یەک شـێوە بەکاردێـت، نمـونە بەس چـوار لا بەکـاردێنین یـان هەر شـێوەیەکی تــر. یەکێــک لە شــێوەکان کە دەتوانــدرێت پێکەوەبلکێنــدرێن بەو شــێوەی وتمــان، بــریتییە لە چەنــد لایە ڕێکەکــان، وەک: چــوار لا و شــەش لا، کە دەتواندرێت کاشییە بەندبکرێت، وەک لە وێنەکەشدا دیارە.

ڕیزبەنـدی ئـاڵۆزتر و وردتـر، دەکرێـت دروسـتبکرێت بەهـۆی پـێکەوە گرێدانـدانی چەنـد شـێوەیەکی لێـک جیـاواز. سـادەترینیان، زانـراوە بە چانـدنی دەوری (Periodic Tilings)، کە شــــــێوەیەکی هاوچەشــــــنە بەهــــــۆی کشــــانەوە-وەرگێــڕان. ئەوەش واتــای ئەوەیە: لەو ڕیزبەنــدکردنە کلێشــە-شــێواز هەیە، ئەو کلێشــانەش (Pattern) دەتوانــدرێت بەجــۆری جیــاواز ئاراستەبکرێت.

---

[65] پیانووسان: لکاندنی شتێک بە شتێکدا.

لە جـــۆرە جیاوازەکـــانی چەنـــد رووەکـــان، واتە شـــێوە ســـێ ڕەهەنـــدییەکان، تەنیـــا شـــەش پـــاڵو ئەو توانـــایەی هەیە کە بەکاربهێنـــدرێت بـــۆ ڕیزبەنـــدی کـــردن لە ئـــاهووتەی ســـێ ڕەهەندیـــدا بە ڕەچـــاوکردنی ئەو مەرجـــانەی باســـمانکرد، بەڵام ئەگەر بێـــت و ڕۆبچیـــنە چەنـــد رووە زۆر ئاڵۆزەکـــان، ئەوە ئەســـتەم نیـــیە ئەو کـــارە بکرێـــت، وە دەکرێـــت بگەیـــنە ناکۆتـــا ڕیزبەنـــد-کاشـــییە بەنکـــردن کە پێـــی دەوترێـــت: شـــامەنگ (honeycombs). ئەمەش گـــرنگە لە (crystal chemistry)، کاتێـــک ســـەرەکانی چەنـــد رووەکە ئامـــاژەن بـــۆ شـــوێنی ئەتۆمەکـــان لە کریســـتاڵەکە. شـــیکردنەوەی شـــامەنگەکان دەریـــدەخات کە 230 ڕیزبەنـــدی ســـەربەخۆ، دەوری مەودای شیاوی پێکهاتەکانی کریستاڵەکان دەدەن.



لکاندنی پنرۆز

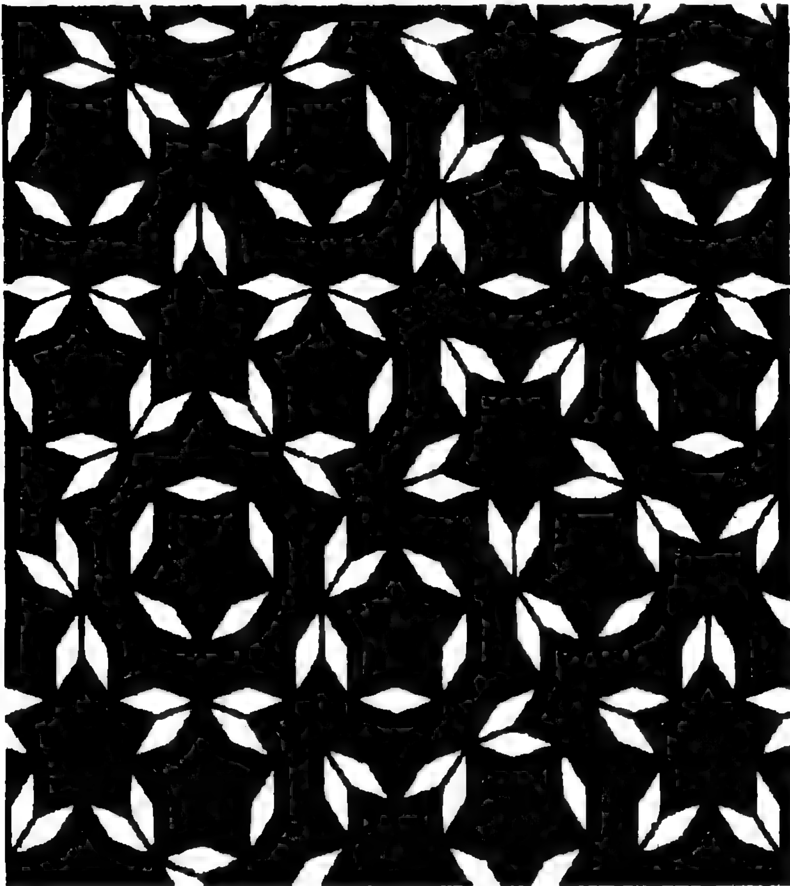
Penrose

لکاندنی پنرۆز[66] بریتییە لە پۆلێکی تایبەت لە لکاندنی دوو جۆر شێوەی سەرەتایی لێکجیاواز. ئەم لکاندنە لە دەوروبەری ساڵی 1870 لە لایەن فیزیازانی تیۆری "رۆگەر پنرۆز" داهێنرا. لەم لکاندنەدا، کلێشە دووبارە نابێتەوە بە شێوەی خول. ئەوەی جێگای ئاماژە پێکردنە، ئەم شتە رووتە (پەتییە) سەلێمندراوە کە چەند بەکارهێنانێکی سروشتی هەیە. لە سەرەتاکانی 1980، زانستخوازە مەتریاڵەکان، پێکهاتەیەکی خولییان داهێنا کە پێی دەوترێت: نیمچە کریستاڵ (Quasicrystal) لەگەڵ تەفسیرێکی بیرکارییانە. ئەمانەش دەتواندرێت بەکاربهێندرێت وەک رووپۆشێکی پتەو بۆ مادەکان، کە بەرکەوتنی زۆر لاوازی هەیە.

سادەترین پنرۆز کە دروستکراوە لە بەکارهێنانی لەپزینەیی قەبە و لەپزینەیی لاواز ("fat" rhombus and a "thin"rhombus) وەک شێوەی سەرەکی، وەک لە وێنەی خوارەوە نیشاندراوە. لەپزینە، بریتییە لە شێوەیەک کە چواری لای یەکسانی هەیە، بەجۆرێک کە هەر جووتێکی

[66] سێر رۆجە پێنرۆز (8ی ئابی 1931) فیزیکزان، بیرکاریزان و فەیلەسوفێکی بە رەچەڵەک ئینگلیزە. پرۆفیسۆرە بە هەڵگری ناونیشانی روز بۆڵە لە پەیمانگای بیرکاری لە زانکۆی ئۆکسفۆرد. پێنرۆز ناسراوە بە ئیشەکانی لە دنیای فیزیای بیرکاریانەدا، بە تایبەتی کارەکانی لە بواری تیۆری گویزەیی گشتی و کۆزمۆلۆجیدا. چەندین خەلاتی وەرگرتوە لەوانە: خەلاتی ۆلفی ساڵی 1988 لە فیزیا، هاوکات لەگەڵ ستیڤن هۆکینگ پێکەوە لەسەر تێکەشتنیان لە گەردوون.

لایە بەرامبەرەکـــان تەریـــبن. شـــتێک کە لەم بـــارییەوە نەزانـــراوە، ئەوەیە: دەکرێـــت شـــێوەیەک (تەنیـــا یەک شـــێوە) بـــدۆزرێتەوە کە بتوانـــدرێت پێکەوەبنـــدرێت بـــۆ دروســـتکردنی شـــتێکی لەم شـــێوە بەهەمـــان ئەو تایبەتمەندییەی ئێستا؟



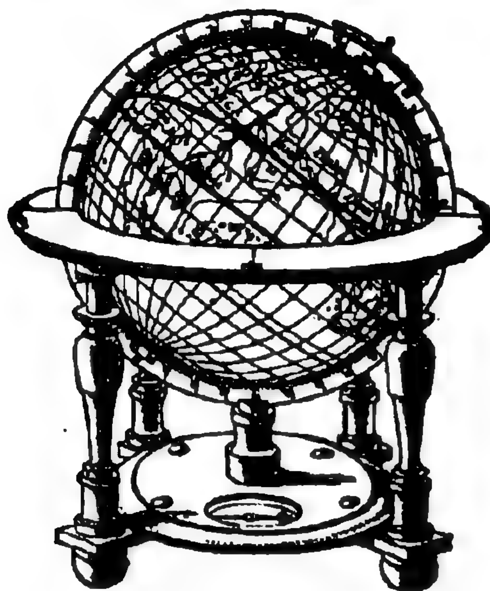
گۆ

Sphere

گـۆ، بـریتییە لە شـێوەیەکی سـێ ڕەهەنـدی کە هاوتـای بـازنەیە لە ئـاهووتەی دوو ڕەهەنـدی، کە بە تەواوی شـتێکی خـڕی نـاو پـتەوی ئەنـدازەییە. ڕووی گـۆ بیرکارییـانە پێناسـەکراوە وەکـوو کـۆمەڵە خاڵێـک کە هەموویـان هەمـان دووریـان r هەیە لە خـاڵێکی دیـاریکراو، بەلام لە ئـاهووتەی سـێ ڕەهەندیـدا. ئەم دووریـیە r بـریتییە لە نیـوەتیرەی گـۆیەکە، وە خـاڵە دیـاریکراوەکە، بـریتییە لە چەقـی (ناوەڕاسـت) گـۆیەکە. بە درێژتـرین ڕاسـتەهێڵی نـاو گـۆیەکە، کە دوو خـاڵی بەرامـبەر یەکـی گـۆیەکە بەیەکەوە دەبەسـتێتەوە و بە چەقـی گـۆیەکەش تێپەڕدەبێـت و درێژییەکەشـی دوو ئەوەنـدەی نیـوەتیرەی گـۆیەکەیە، دەوترێـت تیـرەی گـۆیەکە. ئەگەر گـۆیەکە، ڕاگیرکەرێکـی هەبێـت لە دەوری چێـوەکەی، بـۆ نمـونە هێڵـی جەمسـەری زەوی، ئەوە هەر شـوێنێک لەسـەر ڕووەکەی دەتوانـدرێت وەسـفکرێت و دیاریکرێـت بەهـۆی دوو گۆشـەوە. لە زەویـدا، ئەو هـێڵانە وەک هێڵـی پـانی و هێڵـی درێـژی ناسـراون. هێڵـی پـانی (Latitude) بـرتییە لە گۆشـەی نێـوان ئەو هـێڵەی کە بەسـتراوەتەوە بە شـوێنەکە بـۆ چەقـی گـۆیەکە، کە وەک تیشـکێکە، وەک تەوەرەی سـەرەکی. هێڵـی درێـژی (Longitude) بـرتییە لەو گۆشـەی دەوری تەوەرەکە، لە نێـوان تیشـکی هێڵـی پـانی و هێڵێـک لە خـاڵێکی پێناسـەکراوی ئاشـکرادا، وەک هێڵـی سـەرەتایی درێـژی زەوی (Prime Meridian). ڕووبەری گشـتی گـۆ، بەهـۆی ئەو فۆرمـولەیەوە کە

دەکــــاتە: $4\pi r^2$ هەژماردەکرێـــت. ڕووبەری گـــۆ دەکـــاتە: 4π کاتێـــک نیـوەتیرەی گـۆیەکە 1 بێـت. بەهـۆی هێڵەکـانی درێـژی، کـاتی سـەر زەویمـان پـێ دیـاری ئەکرێـت و هێڵەکـانی پـانیش توانـای نیشـاندانی گەرمیـان هەیە لەســەر زەوی، چــونکە هێڵــی کەمەرەیــی زۆرتــرین تیشــکی خــۆری بەردەکەوێت.

ئەگەر بەهــۆی ڕووتەختــێکەوە، گــۆیەک بکەیــنە دوو بەش-دوو نیــوە گــۆ (Hemisphere) و کاتێــک ڕووتەخــتەکە بە چەقــی گــۆیەکە دابــروات، ئەوە ڕووتەخــتەکە لە بــازنەیەک گــۆیەکە دەبرێــت کە پێــی دەوترێــت بــازنە مەزنە (Great circle).



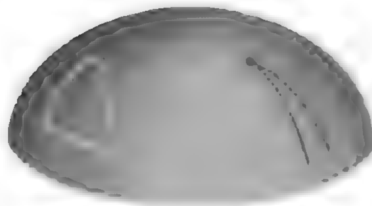
ئەندازەی نا-ئیقلیدی و نا-کلاسیکی

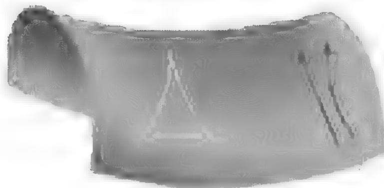
Non-Euclidean and non-classical geometries

تەواوی ئەو ئەنـدازانەی کە ئیقلیـدی نـین، پێـان دەوترێـت ئەنـدازە نـا-ئیقلیـدییەکان. ئەنـدازە نـا-ئیقلیـدییەکانیش جیـاوازن لە ئەنـدازەی ئیقلیـدی. سـەرجەم ئەو ئەنـدازەیەی لە قوتابخـانە دەیـاخوێنین، هەموویـان ئەنـدازەی ئیقلیـدین. پەیـدابوونی ئەنـدازەکانی تـر دەگەڕێـتەوە بـۆ پێشـکەوتن لە زانسـتەکانی تـر، واتە ئەنـدازەی ئیقلیـدی تەنیـا لە ئـاهووتەی دوو ڕەهەنـدی کـاری پـێ دەکـرا، ئەم ئەنـدازەیەش خـۆی لە 5 بەڵگەنەویسـت دەبینێـتەوە کە پێشـتر باسـمان کـرد. یەکێـک لە ئەنـدازە نـا-ئیقلیـدییەکان بـریتییە لە ئەنـدازەی گـــۆ (Spherical geometry). لە ئەنـدازەی ئیقلیـدی وتمـان "هێـڵ" شـتێکی ڕاسـتە، بەڵام لە ئەنـدازەی گـۆ هێـڵ بـریتییە لە بـازنە! کە بـازنەکەش بە قەد چێـوەی گـۆیەکە دەبێـت، واتە بـازنە مەزنە (Great circle). لە ئەنـدازەی ئیقلیـدی وتمـان ئەگەر لە دەرەوەی ڕاسـتەهێڵێک؛ خاڵێکمـان هەبێـت، ئەوە ڕاسـتەهێڵێکی تـر هەیە بەو خـاڵەدا دەڕوات و تەریـب دەبێـت بە ڕاسـتەهێڵەکەی تـر، بەڵام لە ئەنـدازەی گـۆ، ئەگەر لە خاڵێـک لە دەرەوەی ڕاسـتەهێڵێک (لە ئەنـدازەی گـۆ) هەبێـت، ئەوە هەر ڕاسـتەهێڵێکی تـر بەو خـاڵە دا بـڕوات، بـێ یەک و دوو ڕاسـتەهێڵەکەی تـر دەبڕێـت! واتە لە ئەنـدازەی گـۆ هـیچ دوو ڕاسـتەهێڵێک پـێکەوە تەریـب نـابن لە کاتێـک ڕاسـتەهێڵ لەو ئەنـدازەیە بـرتییە لە بـازنە مەزنە. ئەنـدازەی ئیقلیـدی دەکرێـت دابەشـبکرێت بـۆ دوو بەش، ئەوانـیش ئەنـدازەی چەمـاوەی ئەرێنـی و ئەنـدازەی چەمـاوەی

نەریتـی، کە ئەمـانەش بە ئەنـدازەی نـا-کلاسـیکییش نـاو دەبـرێن. خـاڵی هەرە جیـاواز لەمـانە، ئەوەیە: لە ئەنـدازەی ئیقلیـد کـۆی گۆشـەکانی نـاوەوەی سێگۆشـەیەک بە تەواوی دەکـارتە 180، بەڵام لە ئەنـدازەی نـا-کلاسـکیی بەو شـیوەی نیـیە، وەک لە ئەنـدازەی گـۆ، کـۆی گۆشـەکانی نـاوەوەی سێگۆشـە زیـاترە لە 180 پـلە! وە لە ئەنـدازەی بـڕگەی زیـاد (Hyperbolic) کەمترە لە 180 پلە.







ئەمـــانە بەکاردەهێنـــدرێت بـــۆ تەفســـیری ئەم گەردوونە، ئایـــا فراوانبوونی گەردوون، بە کام لەم مۆدێلانەیە؟ وە چەندین پرسی تر..

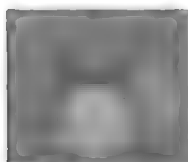
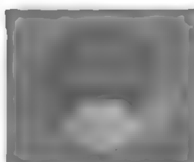
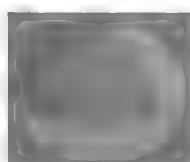
پرسی پێچانەوەی گۆیەکان

Sphere-packing problem

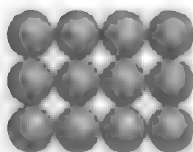
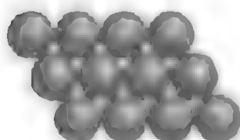
پرسی -کێشەی پێچانەوەی گۆیەکان، یەکێک بوو لە کێشەکانی سەدەکانی ڕابردوو بۆ سەردەمی کیپلەر، کە مێژووەکی سەرنج ڕاکێش و دەوڵەمەندی هەیە. کێشەکە دەربارەی ڕێکخستن و دانانی چەند گۆیەکە، واتە ئەگەر چەند گۆیەکمان هەبێت، ئەوە پێویستە ئەو گۆیانە چۆن دابندرێت بۆ ئەوەی کەمترین بۆشایی دروست بێت لەم کارەدا، ئایا چەند بۆشایی داگیر دەکەن؟ لەگەڵ ئەمەش، دیارە ئەمە پەیوەندی بە دوکانێکی میوەفرۆشی هەبووە، کە یەکێک لە میوەکانی بریتییە لە پرتەقاڵ، کە دەیەوێت پرتەقاڵەکان بۆ جۆرێک لە ناو کارتۆنەکە جێ بکاتەوە کە کەمترین بۆشایی دروست بێت. لەم پرسە لە بری پرتەپاڵ، گولەتۆپ بۆ سەرنج خستە سەر ئەو کێشەیە بەکارهات. لە سەدەی 17، گەردووناسی ئەڵمانی "جۆهانس کیپلەر"[67] گریمانەیەکی کرد، لەم پرسەش ڕێکخستنێکی سادە ئەنجامدرا بەهۆی دانانی گۆیەکان بە شێوەیەک چەند ڕیزێک، کە ڕیزەکانیش پێکەوە شێوەیەکی دووجا (چوارلای یەکسان) دروست دەکەن، پاشان دانانی چینێکی تر لە ئەو شێوانەی کە بۆشاییەک دروست بووە

50 کیپلەر، بیرکاریزان و گەردوونناس و ئەستێرەناسی ئاڵمانی بوو. ڕۆڵێکی سەرەکی هەبوو لە شۆڕشی زانستیی سەدەی 17هەمدا. ناوبانگی کیپلەر دەگەڕێتەوە بۆ یاساکانی لەبارەی جووڵەی هەسارەکانەوە کە چەندین بەرهەمی هەبوون لە بوارە جیاجیاکان.

(وەک ڕیزکردنـــی هـــێلکە لەســـەر یەکتـــری)، پرســـیارەکە ئەوەیە: ئەو تۆپـــانە لە نـــاو پاکەتێـــک-کارتۆنێـــک چەنـــد شـــوێن دەگـــرن؟ بـــۆ نمـــونە ئەگەر چـــوار تـــۆپی

بلیـــار بە شـــێوەیەکی چوارگۆشـــەیی پـــێکەوە بلکێنـــین، پاشـــان تـــۆپێکی تـــر بخەیـــنەر ســـەر ئەو چـــوار تـــۆپە، ئەگەر ئێســـتا بێنـــین لە هەر تـــۆپێکی چینـــی خـــوارەوە، چـــارەگێکی لـــێ بهێڵیـــنەوە، وە تـــۆپەکەی چینـــی ســـەرەوەش نیـــوەی بهێڵیـــنەوە (وەک لە وێنەکـــانی ســـەرەوە)، ئەوە دەگەیـــنە دەرئەنجامێـــک، ئەو ئەنجـــامە ئەوەیە تـــۆپێکی تەواو دەکـــات بە هەموویـــان. ئەوەی پێـــی دەگەیـــن لەم میتـــۆدە، ئەوەیە کە پێچـــانەوەی کۆمەڵێـــک تـــۆپ 74% و شـــتێک زیـــاتر لەو بۆشـــاییەکە دەگرێـــت کە تۆپەکـــانی لە نـــاو دەپێچیـــنەوە! ئەمەش بەهـــۆی زانینـــی یەکەکـــانی ئەو شـــتەی کە گۆیەکـــانی لە نـــاو دادەنـــێن. ســـەلماندنی ئەمەش بە هـــۆی یـــارمەتی کۆمپیـــوتەرەوە بـــووە کە لە ســـاڵی 2003 بەکۆتـــا گەیشت.

برگە قوچەکییەکان

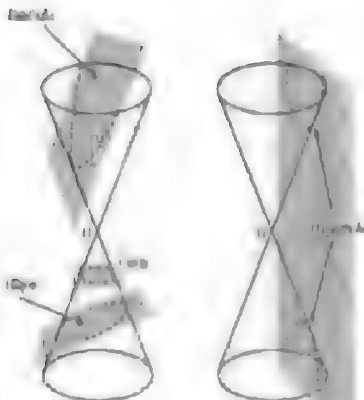
Conic sections

بـــڕگە قوچەکییەکـــان دەگەڕێـــتەوە بـــۆ ســـەردەمی گریکەکـــان، هەر وەک راســـتەهێڵەکان و ڕووتەختەکـــان. گریکەکـــان بـــڕگە قوچەکییەکانیـــان بەو شـــێوە پێناســـە کـــردووە: کاتێـــک قـــوچەکێکی دوانیمـــان هەبێـــت و ڕووتەختێکمـــان هەبێـــت، ئەوە بـــڕگە قوچەکییەکـــان لە ئەنجـــامی بڕینـــی قوچەکەکـــان بەهـــۆی ڕووتەختـــێکەوە پەیـــدا دەبـــن، بەڵام لە ئێســـتا بـــڕگە قوچەکییەکـــان بە جەبریـــانە پێناســـەکراون و لێکۆڵینەوەیـــان لەســـەر دەکرێـــت، یانیش لە ڕێگەی بەکارهێنانی یاسای دووری لە ڕووتەختی پۆتاندا.

بـــڕگە قوچەکییەکـــان، بـــۆ تێگەیشـــتنمان لە ڕێـــڕەوی هەســـارەکان یارمەتیمـــان دەدەن، کە جوڵەیـــان دیاریـــدەکرێت بەهـــۆی هێزێـــک، کە ئەو هێـــزە هـــاوڕێژەیە لەگەڵ دووجـــای دوورییەکەیـــان. لە ئاســـماندا، هەســـارەکانی کـــۆمەڵەی خـــۆر بە دەوری خـــۆردا دەخـــولێنەوە لە چەنـــدەها خـــولگە کە شـــێوەی بـــڕگەی نـــاتەواو-هێلکەیـــی وەردەگـــرن، وەک کە ڕۆژ ڕۆڵـــی تیشـــکۆ دەبینێـــت. ئەو ڕووتەخـــتە چـــۆن و بە چ شـــێوەیەک قـــوچەکەکە دەبڕێـــت، ئەوە چەنـد بـــارێکی جیـــاوازی لـــێ دروســـت دەبێـــت، ئەوانـــیش هەر یەکە و ســـیفەت و شێوەیەکی تایبەتی هەیە، کە ئەمانەن:

- دروســتبوونی بــازنە (Circle): ئەگەر بێــت ڕووتەخــتەکە بە شێوەیەکی ئاسۆیی قوچەکەکە ببڕێت.
- بــڕگەی هاوتــا (Parabola): کاتێــک ڕووتەخــتەکە بە شــێوەیەکی لار قــوچەکەکە دەبڕێــت وە تەریــبە بە قــوچەکەکە، بەو مەرجەی ڕووتەختەکە بە خاڵی O تێپەڕنەبێت.
- بــڕگەی نــاتەواو (Ellipse): کاتێــک ڕووتەخــتەکە بە شێوەیەکی لار قــوچەکەکە دەبڕێــت، وە ڕووتەخــتەکە تەریــب نەبێــت بە قوچەکەکە و بە خاڵی O دا تێپەڕنەبێت.
- بــڕگەی زیــاد (Hyperbolic): بــڕگەی زیــاد لە بــڕگەی نــاتەواو دەچێــت، کاتێــک ڕووتەخــتەکە و گۆشــەی ڕووتەخــتەکە کەمترە لە گۆشەی قوچەکەکە.

بــــارێکی شــــاز لە بــــڕگە قوچەکییەکــان کە بــــڕیتییە لە تێپەڕبــوونی ڕووتەخــتەکە بە خــــاڵیO ، ئەویــــش یــــان ڕووتەختەکە وەک خــــۆی دەمێنێــــتەوە و گۆڕانکــــاری دروســــت ناکــــات، یــــان ڕاستەهێڵێک دروست دەبێت.



ڕووتەختی پۆتان (دیکارتی)

Cartesian coordinates

لە بیرکاریدا، ڕووتەختی پۆتان یان ڕووتەختەتی دیکارتیشی پێدەڵێن، بریتییە لە تەوەرەیەکی دوو ڕەهەندی یا سێ ڕەهەندی، کەتێدا وەسفی شوێنی خاڵێک دەکەین لە ئاهووتەدا-بۆشایی. لە ئاهووتەی دوو ڕەهەندی، خاڵ، لە جووتێک ژمارە پێک دێت. هەڵبەتە وەسفی ئەو خاڵە لە ڕووتەخت (Plane) بە هۆی چەقی ڕووتەختەکەیە، ئەویش خاڵ بنەرەتی پێی دەڵێین، کە دەکاتە: (0,0) ، ئەم ڕووتەختە لە دۆزینەوەکانی فەیلەسوفی فەرەنسی دیکارتە[68] لە سەدەی 19 هەم. ڕووتەختی پۆتان دواتر لە نەخشەی جیهان و GPS بەکارهات و ئاسانکارییەکی زۆری بۆ مرۆڤایەتی کرد.

[68] ڕێنێ دیکارت (بە فەرەنسی ʁene dekaʁt) (لەدایکبوون 1596- کۆچی دوایی 1650) فەیلەسووف، بیرکار و شارەزای فیزیک و نووسەری خەڵکی فەرەنسا بوو کە زیاتر تەمەنی لە وڵاتە یەککرتووکانی نیزرلاند (هۆڵەندا) ڕابوارد. نازناوی (باوکی فەلسەفەی نوێ) پێدرا و زۆرینەی گەشەی فەلسەفەی ڕۆژئاوایی کە لە ڕۆژگاری ئەمرۆشدا دەیبینین، درێژەی نووسراوەکان و بیرەوەرییەکانی ئەوە. بە تایبەت پەرتوکی (ڕامانگەلێک لە فەلسەفەی ئەولادا) ئێستاکەش وەک بەشی سەرەکی خوێندن لە زانکۆکانی فەلسەفە بەکاردێت. کاریگەریی دیکارت لەسەر بیرکاری بە ڕوونی دیارە؛ سیستەمی پۆتانەکانی دیکارت (Cartesian coordinate system) ڕێگە دەدات شێوە هەندەسییەکان لەسەر هاوکێشە جەبرییەکان بەیان بکرێن. دیکارت وەک باوکی ئەندازەی شیکارانە ناسراوە. هەروا دیکارت بە یەکێک لە ئەندامانی شۆڕشی زانستیی دەزانن. (ویکیپیدیا)

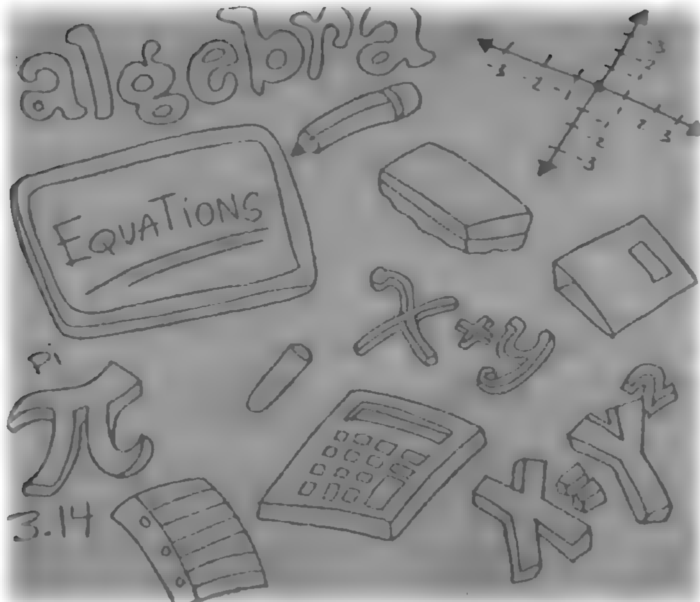
لە ڕووتەختی دوو ڕەهەندیدا، خاڵ بریتییە لە جووتە ڕێکخراوێک بە شێوەی (x,y)، ئەمەش واتای ئەوەیە x یەکە بجوڵێ بە شێوەی ئاسۆیی (ڕاست یان چەپ) و y یەکە بجوڵێ بە شێوەی ستوونی (سەرێ یان خوارێ) و لە کوێ بەیەک گەیشتن، ئەوە خاڵێک دەنوێنن لە ڕووتەختدا.

بەهەمان شێوە، لە شاهووتەی سێ ڕەهەندی (x,y,z) ئەویش بەکاردێت بۆ نواندنی ئەو شتانەی سێ ڕەهەندیان هەیە، وەک گۆ. بیرکاریزانەکان هەر بەوە نەوەستان، بەڵکو توانیان شاهووتەیەکی زیاتر لە 3 ڕەهەندی تەفسیر بکەن و بیردۆزەکان لە بارەیانەوە بخەنە ڕوو. واتە n ڕەهەندی، کە دەکرێت 4 یان 10 یان 15 بێت یان هەر ژمارەیەکی تەواوی ئەرێنی.

بەشی پێنجەم

جەبر

Algebra



جەبر

Algebra

جەبر[69] لقێکی سەرەکییە لە بیرکاریدا، بەلام لەگەل ئەوەش سەردەکێشتە ناو زۆربەی لقەکانی تر، بۆیە دەتوانین بلێین، ڕیشالی بەستنەوەی هەموو بیرکارییە. جەبریش لە ناو خۆیدا دەبێتە چەند بەشێک، سەرەکیترینیان بریتییە لە جەبری سەرەتایی، دواتر جەبری پوخت، وەک: تیۆری گرووپ و تیۆری ئەلقە. لە جەبری سەرەتایی هونەرێک هەیە، ئەویش دەستکاری کردنی زانراو و نەزانراوەکانە، کە دروستکردنی پەیوەندییەکە لە نێوانیان، زانراوەکان زۆر جار دەگۆڕین بۆ نەزانراوێک کە بە پیتێک یان هێمایەک گوزارشتیان لێ دەکەن، زۆر جار بەگشتی بە x ئاماژەی بۆ دەکەین. واتە هێما جێگای ژمارەکان دەگرێتەوە!

نموونە: من خۆم 5 دانە پەرتوکم هەبوو، براکەم چەند پەرتوکێکی تری بۆ هێنام، کە کۆی گشتی پەرتوکەکانم بوو بە 15 پەرتوک. ئەگەر بە وردی سەیر بکەین "براکەم چەند دانە پەرتوکێکی بۆ هێنام"، واتە جارێ نازانین چەند پەرتوک بووە، بۆیە ئەو (چەند پەرتوکە) کە ژمارەکەی نازانین بە x گوزارشتی لێ دەکەین، دواتر دەلێت: کۆی گشتی

[69] جەبر لە داهێنانەکانی شارستانییەتی عەرەبە، لەسەر دەستی خوارزمی. بەهۆی بوونی پەیوەندی بازرگانی لە نێوان ئەوروپییەکان و شارستانییەتی عەرەبی، ئەو زانستە گوێزرایەوە بۆ ئەوروپا، بۆیە پیتەکانی "ال" هەر لەگەل مایەوە لە کاتی وەرگێرانی، بۆیە بووە بە Algebra.

پەرتوکەکانم بووە بە 15، ئەمەش واتە: $x + 5 = 15$. ئەمە پێی دەوترێت هاوکێشەی جەبری. ئەوەش دیارە کە نرخی $x = 15 - 5$ واتە $x = 10$. جەبر بە شێوەکی گشتی دەست تێوەردانە لە نێوان ژمارە و هێماکان. لە بیرمان نەچێت، هاوکێشەی جەبری[70] ئەو هاوکێشەیە کە نەزانراوێکی تێدایە، وەک ئەمەی سەرەوە. دواتر پەیتا پەیتا شتەکان گەورەتر و بەرە و ئالۆزبوون دەچن هەر لە ژێر ناوی جەبر.

70 لە پاڵ هاوکێشەی جەبری، هاوکێشەی ناجەبریش هەیە، هاوکێشەی ناجەبری بەس ژمارەی تێدایە وەک: 23-3=20

هاوکێشەکان

Equations

هاوکێشـــە، بـــرتییە لە دەربڕینێکـــی بیرکاریـــانەیە کە تێـــدا دوو بـــڕ لە نرخـدا یەکسـان دەبـن بە یەکتـر. یەکێـک لە سـیما هەرە دیارەکـانی هاوکێشـە، ئەوەیە کە هێمـــای یەکســـانەی(=) تێـــدایە. بـــۆ نمـــونە: 2+2=4 ئەمە هاوکێشـــەیەکە. وەک وتمـــان، دەکرێـــت هاوکێشـــەکان هێمـــا لەخـــۆبگرن. هاوکێشـە هەر تـایبەت نیـیە بە بیرکـاری، بەڵکـو بە زانسـتەکانی تـریش، وەک لە فیزیـــــــا، هاوکێشـــە بەناوبـــانگەکەی ئەنشـــتاین: $E = mc^2$. یـــان هەر بـــۆ تێگەشـــتنێکی ئاســـانتر $x + 2 = 20$ ، ئەمـــانە گشـــتی هاوکێشـــەن. لە جەبـردا ئەو هاوکێشـانەی هێمـایەک دەگـرنە خـۆی پێـان دەوتـرێن هاوکێشـە جەبرییەکـــان، هێماکـــانیش زۆر جـــار بە پیـــت یـــان ســـیمبولێک-هێمـــا دەردەبڕدرێـت کە پێـان دەوترێـت: نەزنـراو، نمـونە: لەسـەرەوە x دەبینـین، یەکێـک حەزی لـێ بێـت بۆخـۆی پیتـی یەکەمـی نـاوەکەی دادەنێـت، یـان هەر هێمایەکی تر.

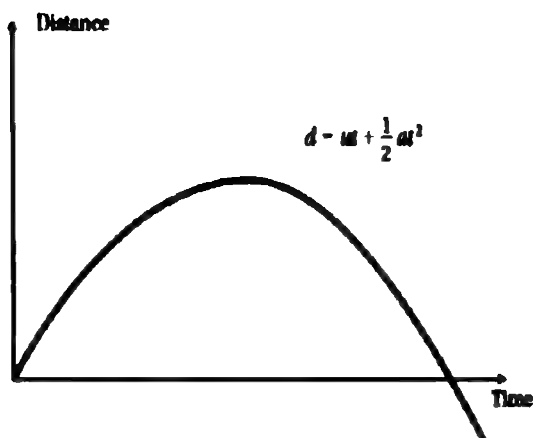
هەر لە جەبـر چەنـد تەکنیکێـک هەیە بـۆ دۆزینـەوەی ئەو نەزانـراوەی لە هاوکێشـــەکە هەیە، مەبەســـتمان ئەوەیە نرخـــی ئەو هێمـــایە چییـــە کە لە هاوکێشـەکەدا هەیە. وەک گـوترا هاوکێشـە هەر مـوڵکی بیرکـاری نیـیە، بەڵکـو لە خزمەتـی زانسـتەکانی تـریش دایە، بەجۆرێـک وەسـفی ئەو جیهـانەی ئـێمە بـــۆ زۆرێـــک لە ڕووداوەکـــان، گشـــتی بە هاوکێشـــەکان تەفســـیر دەکرێـــت، هاوکێشـــەمان هەیە بە نـــاوی "هاوکێشـــەکانی دیـــاردە سروشـــتییەکان"

(مـــانگیران و ڕۆژگیـــران)، کە دیـــاردە سروشـــتییەکان لێکـــدەداتەوە. ئەگەر نمـونەیەک وەرگـرین، یاسـای نیـوتن بـۆ جـوڵە، یـان لە ئابوریـدا هاوکێشـەی پەیوەنـدی نرخـی کـاڵاو بـۆ داواکـاری و دابینکردنـی، ڕێـژەی بـاج و ڕێـژەی داشکاندن، کە ئەمانە گشتیان بەهۆی هاوکێشەوە هەژماردەکرێن.

هاوکێشــە دەکرێــت زیــاتر لە نەزانراوێــک لە خــۆی بگرێــت، وەک: $x + y = 3$ لەگەڵ ئەمەش، کە باســی هاوکێشــە دەکرێــت، ئەوە بیرمــان بــۆ شــیکاری هاوکێشــەش دەڕوات. بە شــێوەیەکی گشــتی، کــۆمەڵەی شــیکاری هاوکێشــەیەک، بــۆ چــوار جــۆر پۆلێنــدەکرێت، شــیکاری هەر هاوکێشــەیەک، سەر بە یەکێک لەو پۆلانەیە ، ئەوانیش:

i. کۆمەڵەی شیکار، (یەک) نرخی تێدایە.
ii. کۆمەڵەی شیکار، زیاتر لە نرخێکی تێدایە.
iii. کۆمەڵەی شیکار، ناکۆتا نرخی تێدایە.
iv. کــۆمەڵەی شــیکار، هــیچ نرخێکــی تێــدا نیــیە، واتە کــۆمەڵەی بەتاڵ ϕ .

ئەم هاوکێشـــەی خـــوارەوە لە وێـــنەکە، یەکـــێکە لە هاوکێشـــە ناســـراوەکانی فیزیـــا، کە پەیوەنـــدییەکە لە نێـــوان دووریـــیەک d کە شـــتێک دەیبڕێـــت (لە بۆشـــایی) لەگەڵ خێرایـــی ســـەرەتایی u ، کە هەڵـبەتە لێـــرەش تـــاودان کـــاریگەری هەیە کە بـــریتییە لە a . ئەم چەمـــاوەی خـــوارەوە دووری بەرامبەر بە کات دەنوێنێت.



هەڵسوڕاندنی هاوکێشەکان

Manipulating equations

هاوکێشەکان دەکرێت سادەبکرێنەوە، لە هەندێ دۆخدا شیکاربکرێت بەهۆی بەکارهێنانیان بە شێوەیەکی لێزانانە و بە ڕێگای هەمەچەشن. کە باس لە هاوکێشە دەکەین، هەڵبەتە شتێکی تریش هەیە، ئەویش شیکاری هاوکێشەیە. بۆ هاوکێشەکان چەند تەکنیکێک هەن بۆ شیکارکردن و سادەکردنەوەیان، زۆر جار دەڵێن: بە دەستتێوەردانێک هاوکێشەکە شیکار دەبێت، واتە تەنیا بە یاریکردن بە ڕادەکانی هاوکێشەکە بە ئاسانی دەگەینە شیکاری هاوکێشەکە، بەڵام ئەمە بۆ هەموو هاوکێشەکان ڕاست نییە! لە هاوکێشەکان هەندێک کردار هەن نادیارن، بەڵام لە ڕاستیدا بوونیان هەیە، ئەو شاردنەوە و نەنووسینی ئەو کردارانە، وەک نەریتێکی هاوکێشەکان وایە. وەک لە هاوکێشەکان دەبینین کە هێمای جاران نانووسرێت (بشنووسرێت کێشە نییە). ئەگەر هاوکێشەیەک لە دوو نەزانراو پێک هاتبێت وەک: $x \times y = xy$ بەو شێوە دەنووسرێت. لە هاوکێشە بە ناوبانگەکەی ئەنشتاین دەبینین کە نووسراوە: $E = mc^2$ کە واتای $E = m \times c \times c$ هەیە. ئەم خۆلادانەش لە هەندێ شت لە کاتی کارکردن لە هاوکێشەکان تەنیا بۆ سادە دەرکەوتنی هاوکێشەکانە نەوەک شتی تر.[71] بەڵام ئەم شاردنەوەی کرداری 'جاران'ە بۆ هەموو ڕادەکان

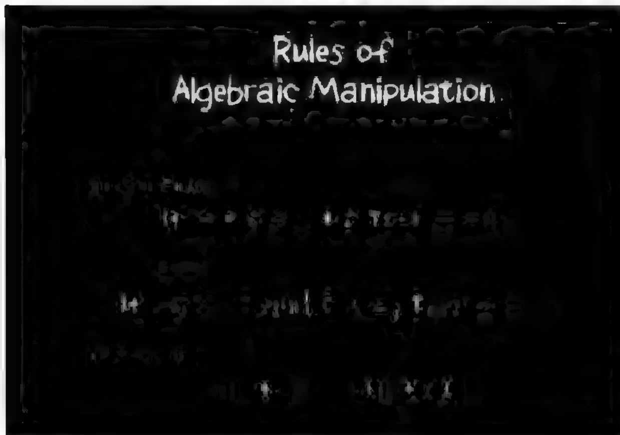
---

[71] دەتوانین هێمای (×) لە نێوان دوو شت لابەرین کاتێک ئەو دوو شتە لە ڕووکار پێکنەچن. وەک: $a \times 2$ دیارە لێرە دەتوانین هێمای 'جاران' لابەرین، بەڵام بۆ : 3×2

ڕاستە؟ هەڵبەتە نەخێر، ئەگەر هەمان بێت: $6 \times 5 + 4 \times 3$ دیارە کە لێرە هێمای جاران لابەرین شتەکە دەشێوێت و دەبێتە کارێکی نامەعقولانە، ئەم شێوەی سەرەوەش تووشی سەرلێ شێوانمان دەکات! ئەی چارەسەر، چارەسەر ئەوەیە دەبێت کەوانە( ) بەکاربێنین بۆ ئەوەی لە هەندی سەرلێشێوان خۆمان لابدەین و تووشی هەڵە نەبین، بەلام دانانی کەوانەش هەروا بەحەزی خۆمان نییە، سەیری ئەو دوو شێوەیە بکە:

$(3 \times 4) + (5 \times 6)$ جیاوازی هەیە لەگەڵ $3 \times (4 + 5) \times 6$ ،

بۆیە لە جەبر چەند یاسایەک هەن بۆ ئەو مەبەستە، کە بە یاساکانی هەڵسوڕاندنی جەبری ناسراوە، کە لە خوارەوە ئاماژەیان پێکراوە.



دیارە کە ناتوانین، چونکە ئەم دوانە پێکدەچن. بە شێوەیەکی گشتی: لابەردنی هێمای جاران لە نێوان ژمارەکان (ئەوانەی هێمایان نییە) ڕێگەپێدراو نییە.

هاوکێشە هاودەمییەکان

Simultaneous equations

هاوکێشـــە هاودەمییەکـــان، بـــریتییە لە چەنـــد هاوکێشـــەیەک بەیەکەوە ،کە چەنـــد نەزانراوێـــک لەخـــۆدەگرن. ئەگەر دوو هاوکێشـــەمان هەبێـــت کە بەو شـــێوەی کە هـــاتووە: $x - y = 1$ ، $2x + y = 3$ ،دیـــارە وەک دەبینـــین دوو هاوکێشـــەیە بە یەکەوە، کە نەزانراوەکـــانی بـــریتین لە x و y . ئەوەی گـــرنگە لەو بـــابەتە، ئەوەیە کە ئەو دوو هاوکێشـــەیە بەیەکەوە پەیوەســـتن، واتە دوو هاوکێشـــەی جیـــا و ســـەربەخۆ نـــین، دەشـــکرێت بەســـەربەخۆی لێـــانەوە بـــدوێین، بەڵام مەبەســـتی ئـــێمە لێکـــۆڵینەوەیە لێیـــان ئەگەر پـــێکەوە بـــن. مـــومکینە پرســـیارێک دروســـت بێـــت، ئەمـــانە پـــێکەوە چـــۆن قســـەیان لەســـەر دەکرێـــت؟ پرســـــیارەکە ئەوەیە، دوو هاوکێشـــــە و دوو نەزانراومـــــان هەیە، شـــێکارەکە چیـــــیە؟ واتە نرخـــــی x و y چەنـــــدە کە پاســـــەدانی هەردوو هاوکێشـــەکە دەکـــات؟ بە نمـــونەیەکی ژیـــانی ڕۆژانە: ئەگەر کەســـێک دوو منداڵی هەبێت، لەگەڵیـان دەچێتە بـازاڕ، بـاوکەکە پێوسـتە چییـان بـۆ بکرێـت تـا دڵـــی هەردوو منـــداڵەکەی ڕازی بکـــات (یەک جـــۆر شـــت)؟ کەواتە ئەگەر دوو هاوکێشـــــە پـــــێکەوە بە سیســـــتەمێک ســـــەیریان بکەیـــــن، ئەوە بەیەکەوە شـــێکارێکی هاوبەشـــیان هەیە! چەنـــدین ڕێگـــا هەن بـــۆ شـــێکاری ئەم سیســـــتەمە، بە لەجیـــاتی دانـــان (Substitustion) یەکـــێکە لە ڕێگاکـــان. بەوشێوەی خوارەوە: هاوکێشەی یەکەم بە پێی x دەنووسین،

$$x = 1 + y$$

$$2x + y = 3$$

دواتر بە دانانی نرخی x لە هاوکێشەکەی ژێر ئەو،

$$2(1 + y) + y = 3$$

$$2 + 2y + y = 3$$

$$3y = 3 - 2 \rightarrow 3y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{3}$$

لێرە نرخی yمان دۆزییەوە کە کردییە: $y = \frac{1}{3}$، نرخی y لە یەکێک لە هاوکێشە سەرەکییەکان دادەنێینەوە و نرخی x دەدۆزینەوە، بەو شێوە:

$$x = 1 + \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

کەواتە نرخی x دەکاتە $x = \frac{4}{3}$ و نرخی y دەکاتە $y = \frac{1}{3}$

یەکگشتی، چەند نەزانراو هەبێت، دەبێت ئەوەندە هاوکێشەش هەبێت بۆ ئەوەی شیکارێکی تاقانە (Unique) بۆ هاوکێشەکان بدۆزینەوە. ئەگەر ژمارەی هاوکێشەکان لە نەزانراوەکان زیاتر بوو، ئەوە هیچ شیکارێک نییە بۆ هاوکێشەکان، ئەگەر ژمارەی نەزانراوەکان زیاتر بوو لە ژمارەی هاوکێشەکان، ئەوە ناکۆتا- بێ سنوور شیکار هەیە بۆ هاوکێشەکان. لەو وێنەی خوارەوە دەبینین کە ئەو دوو هاوکێشە هەر یەکەیان ڕاستەهێلێک دەنوێنێت، کە وێنەی هەردوو هاوکێشەکە دەکێشین، دەبینین لە خالێک یەکتر دەبڕن، ئەم خاڵەش بریتییە لە شیکارەکە.



ئەم دوو ڕاستەهێڵە، دوو هاوکێشە پیشاندەدەن بە شێوەیەکی ئەندازەیی، خاڵە هاوبەشەکەش، شیکاری هەردوو هاوکێشەکە دەنوێنێت.

هاوکێشەکان و وێنە ڕوونکردنەوەییەکان

Equations and graphs

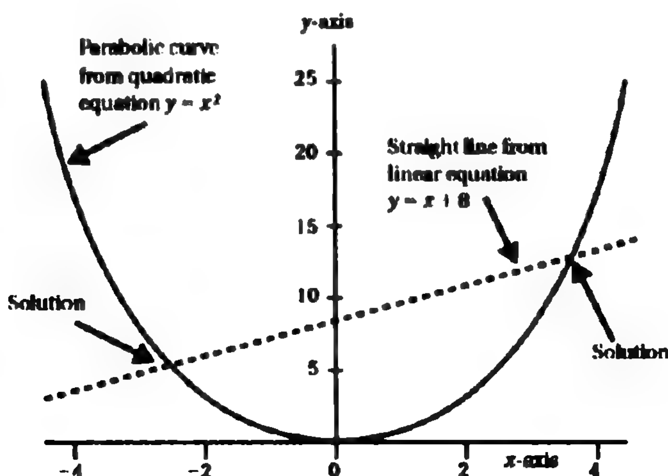
لە بابەتی پێشوو باسی هاوکێشەمان کرد. لەم بابەتە باسی وێنەی ئەو هاوکێشانە دەکەین، واتە هەر هاوکێشەیەک وێنەیەکی هەیە، هەر وەک چۆن هەر مرۆڤێک ئاسۆکێکی[72] خۆی هەیە.

لە ڕێگەی وێنەی هاوکێشەکان، باشتر حالی دەبین کە چۆن نرخی یەکێک لە نەزانراوەکان دەگۆڕێت بە گۆڕانی نەزانراوەکەی تر. مەبەستی ئێمە لەو هاوکێشەیە؛ کە دوو نەزانراوی تێدایە x و y ، دیاریشە ئەمانە لە تەوەرەی پۆتان، واتە ڕووتەختی دیکارتی وێنەدەکرێن. ئەگەر نموونەیەک وەرگرین، هاوکێشەی $y = x^2$، ئەمە هاوکێشەیەکی دووجایە (Sequere) کە شێوەکەی لە وێنەی بەرامبەر دراوە. لەبەر ئەوەی نەزانراوی x توانی دووە، واتە بۆ هەر y یەک دوو نرخ هەن! بە واتایەکی تر ئەگەر y=4 ، ئەوە دوو ژمارە هەیە کە پاسەدانی هاوکێشەکە دەکات، ئەوانیش 2 و 2-. هەر لە بابەتی پێشوو باسی سیستەمان کرد (هاوکێشە هاودەمییەکان)، واتە چەند هاوکێشەیەک بەیەکەوە. لێرەش ئەگەر ئەم هاوکێشەی سەرەوە لەگەڵ هاوکێشەیەکی هێڵی (توان یەک) مان هەبێت، پاشان وێنەیان بکەین بە یەکەوە، بە شێوەی ئەندازەییانە دەبینین کە شیکاری ئەو دوو هاوکێشەیە بەیەکەوە چییە. وەک لەو شێوەی بەرامبەر.

---

[72] ئاسۆک: سیبەر.

دیــارە ئەو دوو وێــنەیە لە کــوێ یەکتریــان بڕیــووە، ئەوە ئەو شــوێنە دەبێــتە شیکاری هاوکێشەکان.



پەرەبــــــۆلا-بــــــڕگەی هاوتــــــا واتە ئەو هاوکێشــــــەیە: $y = x^2$ و هاوکێشەی دووەم، کە هاوکێشەیەکی هێڵییە: $y = x + 8$

شــیکاری هاوکێشــەکان بەو شــێوەیە دەکرێــت: هاوکێشــەی دووەم لە هاوکێشەی یەکەم دادەنێینەوە: $x + 8 = x^2$

لەمەوەش تۆزێک ڕێکی دەخەین دەبێتە: $x^2 - x - 8 = 0$

بە یاســـای دەســــتور $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ نرخەکـــان دەدۆزیـــنەوە کە $a = 1$ ، $b = -1$ ، $c = -8$

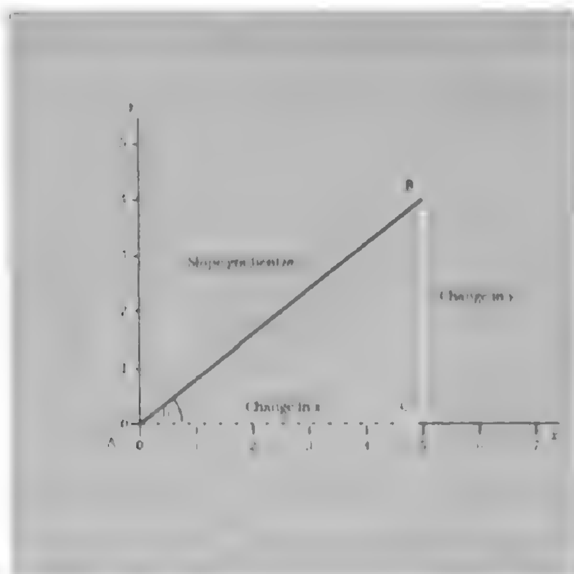
هاوکێشەی هێڵی ڕاست

The equation of a straight line

هەمـــوو هێڵێکـــی ڕاســـت لە تەوەرەی ڕووتەختـــی دوو ڕەهەنـــدی دەتوانـدرێت بە یەکێک لەو شـێوانە بنووسـرێت، ئەویـش: $x = a$ کە لێـرە a ژمـــــارەیەکە، یـــان بە شـــێوە گشـــتییەکەی: $y = mx + b$ کە m و c دوو ژمـارەن. لێـرە m بـرێتییە لە لاری هـێڵەکە و c بـرێتییە لە نرخـی y کاتێـک هێڵەکە تەوەرەی y دەبڕێت.

لاری m دەتوانــدرێت لە ڕێــگەی دوو خــاڵ بــدۆزرێتەوە، کە لەڕێــگەی ڕێــژەی جیـاوازی نێـوان بەرزی-سـتوونی ئەو دوو خـاڵە و جیـاوازی نێـوان درێــژی- ئاســۆیی ئەو دوو خــاڵە، واتە بە شــێوەی بیرکارییــانە ئەگەر دوو خـــــــالی وەک (x_1,y_1) و (x_2,y_2) هەبێـــــــت، ئەوە لاری دەکــــــــاتە: $m = \frac{y2-y2}{x2-x1}$. وەک لە وێنەی بەرامبەردا دیارە لارییەکە دەکاتە $\frac{4}{5}$.

هەردوو هاوکێشـــــــــەی $x = a$ وە $y = mx + b$ دەتوانـــــــــدرێت بە شـــێوەیەکی گشـــتی بنووســـرێت ، ئەویـــش $rx + sy = t$ کاتێـــک $r,s \& t$ ژمـارەن. دیـارە کە نابێـت هەمـوو $r,s \& t$ سـفر بێـت، چـونکە گەر هەمـوو ئەمانە سفر بێت؟



لە قۆناغەکـــانی ئامـــادەیی، قوتـــابی زیـــاتر ئاشـــنای کـــالکیلەس (Calculus) دەبێـت، جـا بـۆیە کە بـابەتی داتاشـراوە دەخوێنێـت، ئەوە زیـاتر لە بنەڕەتی لاری تێدەگات، چونکە داتاشراوە واتا لاری.

هاوکێشەی ڕووتەخت

The equation of a plane

ڕووتەخت، بریتییە لە ڕووەکی تەختی دوو ڕەهەندی لە ئاهووتەیەکی سێ ڕەهەندی. هاوکێشەی ڕووتەختیش بریتییە لە: $ax + by + cz = d$، کە ئەمە هاوکێشە گشتییەکە بۆ ئاهووتەی سێ ڕەهەندی کاتێک a،b،c،d ژمارەن و بە لایەنی کەم نابێت یەکێک لە مانە سفر بێت؟! بۆ نموونە ئەگەر ئێمە وەسفی شێوەیەک بکەین لە سێ ڕەهەندی، ئەوە پێویستمان بە گۆڕاوی z دەبێت بۆ ئەوەی وەسفی ڕەهەندی سێیەم بکەین. ئەگەر هاتوو a = b = 0، ئەوە هاوکێشەکە کورت دەبێتەوە بۆ $cz = d$ یان $z = \frac{d}{c}$ لەبەر ئەوەی d و c ژمارەن، ئەوە واتا z یش ژمارەیە، بۆیە لەم بارەدا، ڕووتەخت بریتییە لە ڕوویکی ئاسۆیی لە بەرزی ژمارەیەک کە بریتییە لە z . تێبینی ئەوە بکەن کە ئەگەر a = b = 0، ئەوە گۆڕاوەکانی وەک x و y لە هاوکێشەکە بوونیان نامێنێت. باشە بۆچی نابێت a،b،c،d هەموویان بە یەکەوە سفر بن؟ واتە ئەگەر هەر گشتیان سفر بێت چی ڕوودەدات؟ پێشتر باسی شیکاری چەند هاوکێشەیەکمان کرد بەیەکەوە، وتمان وێنەی هەر هاوکێشەیەک دەکێشین، هاوکێشەکان لەکوێ یەکتریان بڕی، ئەوە ئەو خاڵە دەبێتە شیکار بۆ سیستەمەکە. بۆیە بەهەمان شێوە ئەگەر سێ گۆڕاو و سێ هاوکێشەمان هەبوو، ئەوە وێنەکان لە سێ ڕەهەندی دەکێشین، دیسانەوە جار هەیە شیکارمان نییە، جار هەیە شیکارێکی تاقانەمان هەیە، وەیان

ناكۆتا شيكار هەيە، كە ئەمەش دەگەڕێتەوە سەر ئەوەی ئايا ئەم سێ هاوكێشەيە بە يەكتر دەگەن يان نا، وە چۆن.

لێرە تەوەرەی x تەوەرەی ئاسۆيی دەنوێنێت، تەوەرەی z تەوەرەی ستونی دەنوێنێت، تەوەرەیy، تەوەرەيەكی ئەستوونە بەسەر تەوەرەكانی تر.

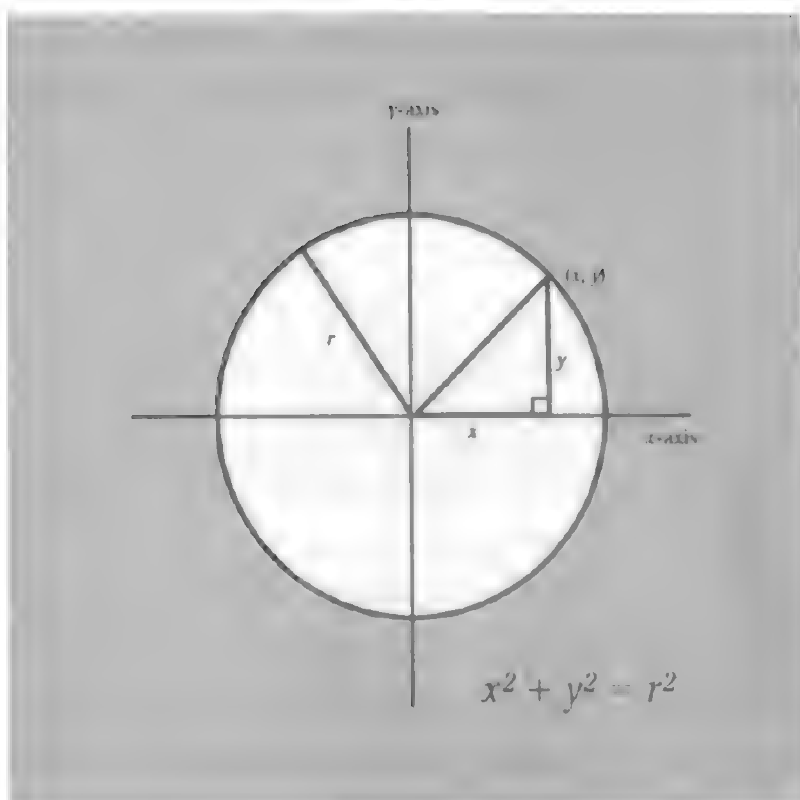
هاوکێشەی بازنە

The equation of a circle

بـــازنە، بـــریتییە لە یەکێـــک لە شـــێوە ئەنـــدازەییە زۆر گرنگەکـــان، کە بـــریتییە لە: کـــۆمەڵەی هەمـــوو ئەو خـــاڵانەی کە دەوری خاڵێکیـــان داوە لە دوورییەکـــی دیـــاریکراو، کە هەمـــوو خاڵەکـــان دوورییـــان لەو خـــاڵە (چەق) نەگـــۆڕە. بە شـــێوەی جەبـــری، دەتوانـــدرێت بە هاوکێشـــە ئەم نووســـینەی ســـەرەوە بنووســـرێت. ئەگەر بێـــت و چەقـــی بازنەکەمـــان بکەوێـــتە خـــاڵی بنەرەتـــی تەوەرەی پۆتـــان، واتە خـــاڵی (0،0) ئەوە بە بەکارهێنـــانی یاســـای فیســـاگۆرس؛ دەتـــوانیین هاوکێشـــەیەک بـــۆ بـــازنە بـــدۆزینەوە بە دەســـت نیشـــانکردنی خـــاڵێکی هەڕەمەکـــی لەســـەر چێـــوەی بـــازنەکە وەک (x,y) بـــۆ هەر دووریـــیەک لەو خـــاڵە r کە مەبەســـت لێـــی نیـــوە تیـــرەیە و ژمـــارەیەکی گەورەتـــرە لە ســـفر (ئەی ئەگـــر ســـفر بێـــت؟!)، ئەوە دەگەیـــن بەو هاوکێشـــەیە: $x^2 + y^2 = r^2$ دواتـــر هەر لە ڕێـــگەی ئەم هاوکێشـــەیەوە دەپەڕیـــنەوە بـــۆ خوێنـــدن و دۆزیـــنەوەی چەنـــد بـــابەتێکی تـــر. ئەگەر لە بیرتـــان بێـــت لە بـــڕگە قوچەکییەکـــان باســـی بازنەمـــان کـــرد، کاتێـــک ڕووتەختێـــک بە شـــێوەیەکی ئاســـۆیی قوچەکێـک دەبڕێـت، ئەوە بـازنە دروسـت دەبێـت، بۆیە بـازنە بـارێکی تـایبەتە لە بـــڕگە قوچەکییەکـــان. لێـــرە پرســـیارێک دروســـت دەبێـــت. چـــی ڕوودەدات ئەگەر بێت و هاوکێشەی بازنە دووجا بکەین؟[73]

---

[73] لەم پرســـیارە پرســـیارێکی تـــریش دروســـت دەبێـــت، ئایـــا هـــیچ بـــازنەیەک دەدۆزیـــتەوە کە یەکسان بێت بە چوارلایەکی ڕێک. واتە بازنەیەک و چوارلایەک هەمان ڕووبەریان هەبێت؟!


y-axis
(x, y)
r
y
x
x-axis
$x^2 + y^2 = r^2$

برگە هاوتاکان

Parabolas

پەرابۆلە-بـڕگەی هاوتـا، یەکێکە لە بـڕگە قوچەکییەکـان. بـڕگەی هاوتـا تەنیـا یەک خـاڵی بەرزتـرین یـان نزمترینـی هەیە، کە بە شـێوە جەبـری بەم شـــێوەی خـــوارەوە هاوکێشـــەکەی دەنووســـرێت، کە لە یەک گـــۆڕاودا دەکاتەوە نەخشەی دووجا:

$y = ax^2 + bx + c$: بـریتییە. ســادەترین نمـوونە لە بـڕگەی هاوتـا، $y = x^2$ لە: لەبەر ئەوەی x^2 ، ئەوە y گەورەتـــرە لە ســـفر، ئەوەش واتە هەمیشـــە دوو نـــرخ هەیە، ئەرێنیـــیەک و نەرێنیـــیەک، کە بەرامـــبەر هەر نرخێکـی y دوو نرخـی هەیە. بـۆیە بچـوکترین نـرخ کە y هەیبێـت بـرتییە لە سـفر. تـا x گەورەتـر بێـت، ئەوە y زۆر گەورتـر دەبێـت (بەنـزبەت ئەو نەخشەیە).

بـڕگەی هاوتـا، زۆر یـارمەتی دەرە بـۆ وەسـفی جـووڵەی تەنەکـان، کـاتێ تـاودانێکی نەگـۆڕ بەسـەرییەوە هەیە، وەک: لە کـاتی هاوێشـتنی موشـەکێک، ئەوە دەزانـین کە بەهـۆی هێـزی کێشـکردنەوەی موشـەکە لە شـوێنێک دەکـاتە بەرزتـرین خـاڵی دواتـر وردە وردە نـزم دەبێـتەوە، بـۆیە لە ڕێـگەی بـڕگەی هاوتـا دەتوانـدرێت ئامـانجەکە بە وردی بپێکێـت، وە چەنـدین بەکارهێنـانی تـر. لە بەکارهێنـانی تـری ئەم بـابەتە، لە یـارییەک بە نـاوی Angry birds.



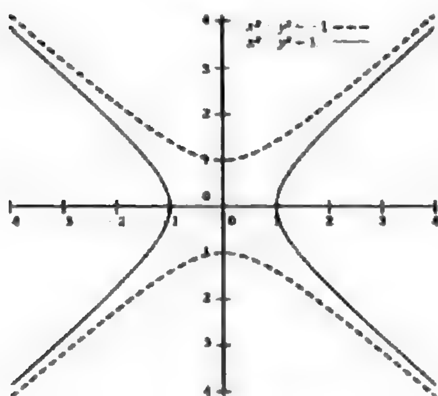
هاوکێشەکانی برگە قوچەکییەکان

Equations of conic sections

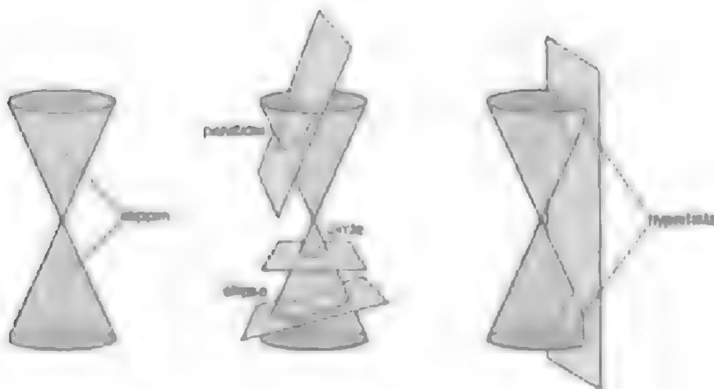
لە بابەتەکانی پێشتر باسی برگە قوچەکییەکانمان کرد، وێنەی برگە قوچەکییەکانیش کە بەهۆی برینی قوچەکەکان دروست دەبێت بەهۆی رووتەختێکەوە. رێسای جەبری بۆ ئەو برگانە چۆنییەکە، بە دەوری تەوەرەی z (z-axis) بریتییە لە: $|z| = x^2 + y^2$ ، کاتێک |z| بریتییە لە مەودا (Modulus) ی z بۆیە |z| یەکسانە بە z ئەگەر هاتوو z ئەرێنی (+) بوو، وە دەکاتە z− ئەگەر هاتوو z نەرێنی(−) بوو. لێرە مەودای z هەرگیز نرخێکی نەرێنی (سالب) نییە.

تەوەرەی z لە رووتەختێکی ئاسۆیی بریتییە لە نەگۆڕێک، واتە ژمارەیەک، وەک: c، کە یەکتر برینی ئەو نەگۆرە لەگەڵ قوچەکێکی ستوونی بەو شێوە پێناسە کراوە: $x^2 + y^2 = |c|$. کە ئەمەش هاوتای هاوکێشەی بازنەیە کاتێک نیوە تیرەی بازنەکە بریتییە لە: $\sqrt{|z|}$. ئەم جارە بۆ یەکتر برین لەگەڵ رووتەختێکی ستوونی، تەوەرەی yای دەبێتە نەگۆرێک-ژمارە، کە هاوکێشەکە بەم شێوەی لێ دێت: $x^2 + c^2 = |z|$ کە ئەمەش هاوکێشەی جووتێک لە برگەی هاوتایە (Porabolas)، کە یەکێکیان z بچوکترە لە سفر $z < 0$ ، ئەوەی تر کە z گەورەترە لە سفر $z > 0$.

بــڕگەی هێلکەیــی-تــاتەواو (Ellipse) و بــڕگەی زیــاد (Hyperbola) بەهــۆی یەکتربڕینێکــی لارەوە دروســت دەبــن بەهــۆی ڕووتەخــتەوە، واتە کاتێــک ڕووتەختــێ بە شــێوەیەکی لار قــوچەکەکە دەبڕێــت. ئەگەر بێــت و ڕووتەخــتەکە چەمــاوەیەکی داخــراوی قــوچەکەکە ببڕێــت، ئەوە بــڕگەی نــاتەواو دروســت دەبێــت کە هاوکێشــەکەی بــڕیتییە لە: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



ئەگەریــــــــش ئەو ڕووتەخــــــتە هەردوو قــوچەکەکە ببڕێــت، ئەوە جووتێک لە بڕگەی زیاد دروســــت دەبێــت کە فــــــــــۆرمەکەی-هاوکێشــەکەی بــڕیتییە لە: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.



برگە ناتەواوەکان

Ellipes

بــــرگەی نـــاتەواو، یەکـــێکە لە بــــرگە قوچەکییەکـــان، ئەمەش کاتێــک دروســـت دەبێــت کە ڕووتەختێــک بە شــێوەیەکی لار و بەتەواوی قــوچەکەکە دەبڕێــت. ئەو بــرگەیەش دەکرێــت بەهــۆی ئەو هاوکێشــەیەوە گوزارشــتی لــێ بکرێـــــت، کە بـــــــریتییە لە: $|z| = x^2 + y^2$. وتمـــــان ئەگەر بێـــــت و ڕووتەخـــتەکە تەنیــا وەک چەمــاوەیەک قــوچەکەکە ببڕێــت، ئەوەی دەســـتمان دەکەوێــت بــریتییە لە: بــڕگە ناتەواوێــک لەو فــۆرمە: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. کاتێــک a و b دوو نەگــۆڕن، واتە ژمـــارەن، کە a نیـــوە تیـــرەی تەوەرەی گەورەیە و b نیــــوە تیــــرەی تەوەرەی بچــــوکە. ئەگەر بێـــت و $a > b > 0$ ئەوا، لە دۆزیــنەوەی ســـەرەکانی بــرگەکە، ئەمە بەکــاردێنین: $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ لە چەقــی بــرگەکەوە. جیــا لەمە، بــرگەی نــاتەواو دەتوانــدرێت بەو شــێوەش پێناســە بکرێـت: کـۆمەڵە خـاڵێکە لە ڕووتەخەختێکـدا کە ســەرجەمی دوورییـان لە دوو خـاڵی دیـاریکراو (تیشـکۆ) دەکـاتە بەهـایەکی نەگـۆڕ. لە سـاڵی 1609 زانـای ئەستێرەناســی ئەڵمـانی "یۆهــانس کیــپلەر" ڕوونیکــردەوە کە هەســارەکان بە دەوری خــۆردا دەخــولێنەوە بە شــێوەیەک، کە هەر یەکێکیــان لە خــولگەیەکی تــایبەت، کە خولگەکــان بــرگەی نــاتەواوە. بەگشـــتی، بــرگە ناتەواوەکـــان دەتــوانن تەفســیری جــوڵەی شــتەکانی پێبکرێــت کە لە ژێــر هێــزی ڕاکێشــانی زەوی یە، وەک: مــانگە دەســـتکردەکان لە خــولگە تایبەتییەکانیــان. ئەم کــارەی

کیـــپلەر ڕاســـتکردنەوەی تیـــۆرییەکەی **کۆپەرنیکـــۆس** بـــوو، کە دەیـــوت: هەسارەکان لە ڕێڕەوێکی بازنەیی بە دەوری خۆر دەخولێنەوە.



ڕادەدارەکان

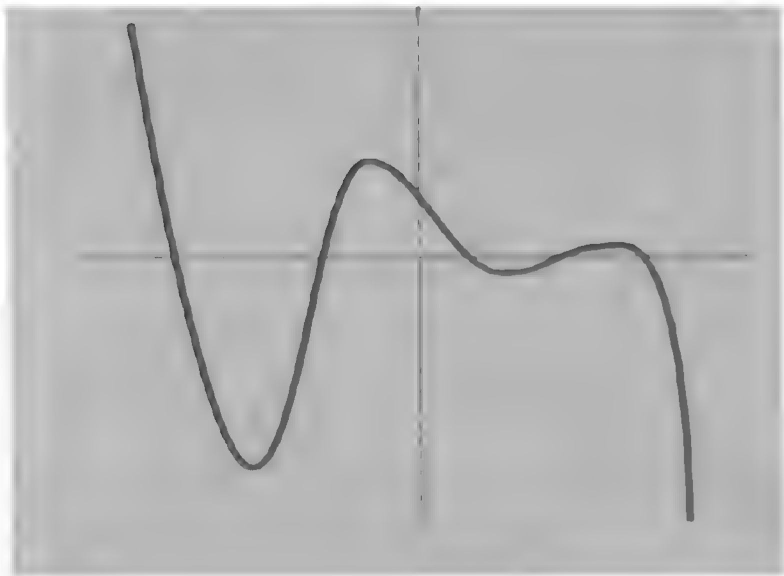
Polynomials

ڕادەدارەکـــان، بــریتین لە دەربڕینێکـــی بیرکارییـــانە لە ســـەر شـــێوەی $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ لە کاتێـــــــــک کە a_i ژمـــــــــــارەن و $i = 0،1،2،..،n$. دەشـــکرێت بە شـــێوازێکی تـــر بڵـــێین: ڕادەدارەکـــان بـــریتین لە زنجیرەیەکـــی دواهـــاتوو لە x بە توانێـــک (هێزێـــک). بەرزتـــرین تـــوان لە ڕادەدارەکـــــــــان، پێـــــــــی دەوترێـــــــــت: پـــــــــلەی ڕادەدارەکە (Degree of polynomial)، ئەو پـلەیە دەلکێنـدرێت بە ڕادەدارەکە، واتە ئەگەر بەرزتـرین تـوانی ڕادەدارێـک 5 بێـت، ئەوە دەڵـێین: ئەوە ڕادەدارێـکە لە پلەی پێنج.

ئەگەر ڕادەدارێـــک پـــلەکەی 2 بێـــت، واتە x^2 هەبێـــت، ئەوە نـــاوێکی تـــایبەتی هەیە و پێـــی دەوتـــرێن ڕادەداری چوارگۆشـــەیی (quadratic). ئەگەر تـــوانی ســـێ هەبێـــت، ئەوە پێـــی دەوترێـــت: ڕادەداری شەشـــپاڵویی (cubic). ڕادەداری پـلە یەک، پێـی دەوترێـت: هێڵـی، چـونکە وێـنەکەی تەنیـا ڕاســتەهێڵێکە. کاتێـک دەڵـێین سـفرەکانی ڕادەدارێـک، ئەو مەبەسـتمان شـێکاری ئەو ڕادەدارەیە، واتە ڕادەدارەکە لە چ نرخێکـــی x دەکـــاتە ســـفر (لەکـــوێ تەوەرەی x دەبڕێت).

ڕادەدارەکـان گرنگییەکـی زۆریـان هەیە لە بـواری فیزیـا، کیمیـا، ئـابوری و زانســـتە کۆمەڵایەتییەکـــان. لە بیرکاریـــدا بـــۆ وەســـفی تایبەتمەنـــدییەکانی

ڕیزکراوەکـــــان (Matrix) بە کاردەهێنـــــدرێت، لەگەڵ ئەوەش، لە جەبـــــری پوخـــت، ڕۆڵێکـــی ئێجگـــار گرنـــگ دەگێڕێـــت. ڕادەدارەکـــان بـــۆ هەژمـــارکردنی ڕووبەر و قەبـــارە بەکاردێـــت، یـــانیش بـــۆ هەژمـــارکردنی قەبـــارەی تەلارە ناڕێکەکان.



ئەم وێـــنەیە، ڕادەدارێـــک دەنووێنێـــت کە لە 5 شـــوێن تەوەرەی xی بڕییە، واتە ڕادەدارێکە لە پلەی 5.

هاوکێشەی پلە دوو

Quadratic equations

هاوکێشـــەی پـــلە دوو، ئەو هاوکێشـــەیە کە گـــۆڕاوێکی تێـــدایە، کە بەرزتـــرین تـــوانی ئەو گـــۆڕاوە بـــریتییە لە 2. واتە هاوکێشـــەیە تەنیـــا دوو ڕەگـــی-شـــیکاری هەیە، کە لە دوو بەهـــا هاوکێشـــەی دەکـــاتە ســـفر. بە شـــێوەی ئەنـــدازەییانە :ئەو هاوکێشـــەیە کاتێـــک دەبێـــت بە ســـفر ئەگەر بێـــت و تەوەرەی x ببڕێـــــت، واتە $y = 0$. شـــــێوە گشـــــتییەکەی بـــــریتییە لە $ax^2 + bx + c = 0$ ، کاتێـــک نابێـــت a ســـفر بێـــت ($a \neq 0$)، ئەگەر ســـفر بێت؟

ئەگەر بێـــت و $b = 0$، ئەوە شـــیکارکردنی هاوکێشـــەکە ئاســـان دەبێـــتەوە بـــۆ شـــیکارکردن، کە: $ax^2 + c = 0$ لەمەوەش $ax^2 = -c$، پاشـــان $x^2 = -\frac{c}{a}$ ، ڕەگـــی دووجـــای هەردوو لا وەردەگـــرین و دەگەیـــنە: $x = \mp\sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)}$ ئەو هێمـــــــایە ∓ واتەی ئەوەیە، دوو شـــــــیکار هەیە، یەکێکـــان ئەرێنـــی و یەکێکـــان نەرێنـــی، چـــونکە x تـــوانی دووە، لەبەر ئەوەی 2 جـــــووتە، و تـــــوانی جـــــووت (-) دەکـــــاتە (+) ، واتـــــــە: $(+)^2 = +$ و $(-)^2 = +$ کە $\left(\mp\sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)}\right)^2 = -\frac{c}{a}$. بە دڵنیـــــــــایی ئەگەر بێـــت و $-\frac{c}{a}$ نەرێنـــی بێـــت (دوای ئەوەی کە نرخـــی c و a دەزانـــین)، ئەوە شـــیکاری هاوکێشـــەکە لە ژمـــارە ڕاســـتییەکان نیـــیە، بەڵکـــو لە ژمـــارە

ئاوێتەکانە (Complex numbers). بە شێوەیەکی گشتی، شیکاری هاوکێشەکە بریتییە لە: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. ئەو بڕە $b^2 - 4ac$ پێی دەوترێت، بڕەی جیاکەرەوە (Discriminant) کە پێمان دەڵێت هاوکێشەکە شیکارەکانی کام جۆرەن، ژمارەی ڕاستین یان نا، ئەویش ئەگەر بێت و بچوکتر بێت لە سفر، ئەوە شیکاری هاوکێشەکە ژمارەیەکی ئاوێتەییە، ئەگەر بێت و گەورەتر بێت لە سفر، ئەوە شیکاری هاوکێشەکە ژمارەی ڕاستین، ئەگەر سفر بێت؟

سێ جاکان، چوار جاکان و پێنج جاکان

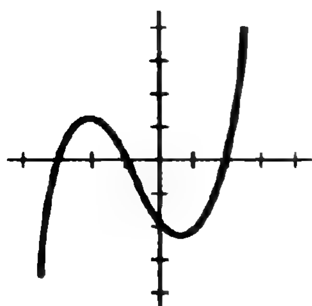
Cubics، quartics، and quintics

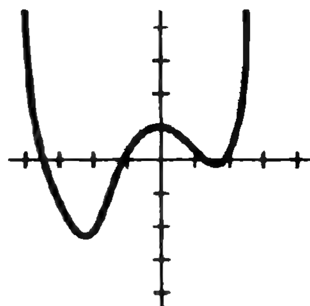
لە بـــابەتی پێشـــوو باســـی ڕادەدارە دووجاکانمـــان (Quadratic) کـــرد. ئێســـتاش ڕادەدارێکـــی پـــلە 3 پێـــی دەڵـــێن: ســـێ جـــا-شـــەش پـــاڵوو (Cubic) کە بەرزتـــرین هێـــز-تـــوان لە ڕادەدارەکە بـــریتییە لە 3. ڕادەدارە پـــلە چـــوار (Quartic) و ڕادەداری پـــلە پێـــنج (Quintic) کە هەر یەکەیـــان بەرزتـــرین توانیـــان بـــریتییە لە 4 و 5. ئەگەر ســـەرنج بـــدەین، هاوکێشـــە پـــلە دووەکـــان تەنیـــا یەک خـــاڵی وەرگەڕانیـــان هەیە، هاوکێشـــە پـــلە ســـێیەکان دوو خـــاڵی وەرگەڕانیـــان هەیە، بە شـــێوەیەکی گشـــتی واتە، هاوکێشـــەکە پـــلە چەنـــد بێـــت، ئەوە خـــاڵی وەرگەڕانـــی هاوکێشـــەکە یەکـــی کەمتـــرە لە پـــلەی هاوکێشـــەکە، وەک هاوکێشـــەی پـــلە 5 دەکرێـــت 4 خـــاڵی وەرگەڕانـــی هەبێـــت نەک زیـــــاتر.

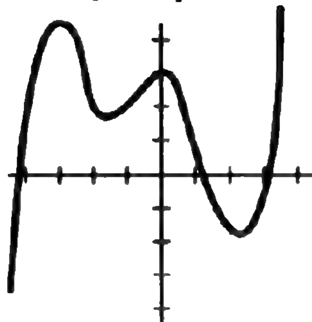
دۆزیـــنەوەی شـــیکارێکی گشـــتی (General solution) بـــۆ ئەو هاوکێشـــە پـــلە بەرزانە بە بەراورد بە هاوکێشـــەی پـــلە دوو، کـــارێکی وەهـــا ئاســـان نیـــیە! شـــیکاری هاوکێشـــەی پـــلە ســـێ، کە لە ســـەدەکانی شـــازدەهەم دۆزرایەوە، شیکارێک، دوو شیکار یان سێ شیکاری هەیە.

بەهەمـــان شـــێوە، پـــاش هەوڵ و تەقەلایەکـــی زۆر، هاوکێشـــەی پـــلە چـــواریش توانـــدرا شـــیکاری بـــۆ بـــدۆزرێتەوە، بەڵام بـــۆ هاوکێشـــە پـــلە پێـــنج، لەگەڵ هەوڵێکـــی زۆر و بەردەوام، هـــیچ شـــتێک دەســـتگیر نەبـــوو ســـەبارەت بە

شـیکارێکی گشـتی بـۆ ئەم هاوکێشـەیە، هەتـاکو تـا سـاڵانی 1820 کاتێـک ئەوە سـەلمێندار کە شـیکاری گشـتی بـوونی نیـیە بـۆ ڕادەداری پـلە چـوار بەرەو سەری! کە لە بابەتەکانی داهاتوو باسیان دەکەین.







بیردۆزی سەرەکیی جەبر

The fundamental theorem of algebra

بیـــردۆزە ســـەرەکییەکان، بـــریتین لە ئەنجـــامێکی بەدەســـت هـــاتوو کە چەقـــی ئەو پانتـــاییە ڕۆشـــنەکاتەوە کە کـــاری تێـــدا دەکرێـــت. بیـــردۆزی ســـەرەکی جەبـــر، وەســـفی ســـفرەکانی-شـــیکارەکانی ڕادەدارێکمـــان بـــۆ دەکـــات بە شـــێوەیەکی گشـــتی. دڵنیامـــان دەکـــاتەوە لە هەبـــوونی ژمـــارەی شـــیکارەکانی ڕادەدارێـــک، واتە پێمـــان دەڵێـــت: هەر ڕادەدارێـــک پـــلەکەی چەنـــد بێـــت، ئەوە بـــێ کەم و زیـــاد (Exactly) ئەوەنـــدە شیکارەشـــی دەبێـــت. واتە ئەگەر ڕادەدارێـــک پـــلەکەی 4 بێـــت، ئەوە چـــوار شـــیکاری ڕەبەقـــی هەیە، بـــۆ ڕادەدارێکـــی پـــلە n، ئەوە n شـــیکار هەیە. ئەوەش وامـــان لـــێ دەکـــات کە تێگەیشـــتنمان فراوانتـــر بێـــت لە هەمـــبەر ڕادەدارەکـــان بە جۆرێـــک لە کـــۆلکەی ژمـــارە راســـتییەوە، بـــۆ کـــۆلکەی ژمـــارە ئاڵۆزەکـــان. بیـــردۆزی ســـەرەکی، شـــیتەڵ کردنێکمـــان دەخـــاتە بەردەســـت، وەک چـــۆن شـــیتەڵی خۆبەشـــمان هەیە، ئەمەش هاوشێوەی ئەوە، کە دەڵێت:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

دەتواندرێت بە شێوای لێکدانی n ڕادە بنووسرێت:

$$a_n(x - z_1) \dots (x - z_n)$$

کاتێـــــک $z_1, \dots, z_n$ ژمـــــارەی ئـــــاوێتەن (Complex number)، هەنـــدێکیان دەکرێـــت بەشـــە خەیاڵییەکەیـــان ســـفر بێـــت، واتە دەکرێـــت

هەنـــدێکیان ژمـــارەی ڕاســـتی بـــن. ئەگەر بێـــت و هاوکۆلکەکـــانی (Coefficients) ڕادەدارەکە a_i گشـتیان ژمـارەی ڕاسـتی بـن، ئەوە ژمـارە ئاڵۆزەکـان ئەوانەی بەشـە خەیاڵییەکەیـان سـفر نیـیە، بە شـێوەی جـووتی ئـاوەڵ دەردەکەون. ئەگەر بێـت و ڕادەدارەکە بکـاتە سـفر، ئەوە بە لایەنـی کەم (at least) یەکێـک لە ڕادەکـانی نـاو کەوانەکـان دەبێـت سـفر بێـت، بە پێچەوانەشـەوە ڕاسـتە. بـۆیە، ئەو فۆرمـولەیە پێمـان دەڵێـت: کە ڕادەدارێکـی پـلە n ، بـێ کەم و زیـاد n شـیکاری- ڕەگـی هەیە، مـومکینە هەنـدێک لە شـیکارەکان دووبـارە بێـتەوە، وە هەنـدێکیان مـومکینە شـیکاری ڕاسـتی- ژمارەی ڕاستی نەبن.

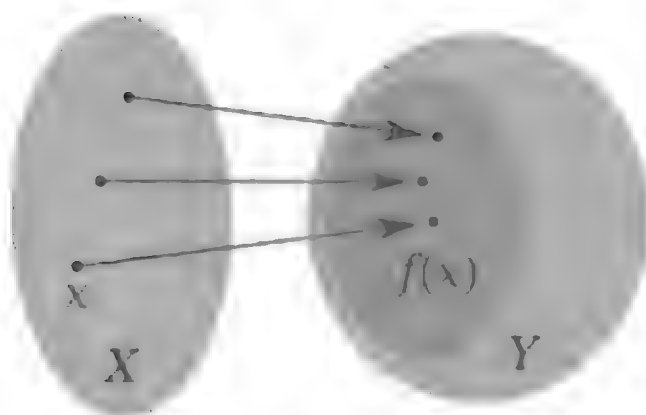
شـــیکاری دووبـــارە بـــووەوە، ئەو شـــیکارەیە کە زیـــاتر لە جارێـــک دەبێـــــتەوە شـــــیکار بە پێـــــی هەل و مەرجـــــی ڕادەدارەکـــــە، وەک: $(x-a)^2=0$ یەک شـــیکاری هەیە، کە بـــریتییە لە a ، بەڵام شـــیکارەکە دوو جـــار دووبـــارە دەبێـــتەوە. ئەمەش دراوەتە پـــاڵ بیرکـــاریزانی نـــاوداری ئەڵمـــانی "کـــارڵ گـــاوس"[74] (Karl gauss) کە ئەو ئەنجـــامەی لە ســـاڵی 1799 بڵاوکـــــردەوە. لەگەڵ ئەمەش، لە ســـــەلماندنەکەی گـــــاوس، کەم و کـــورییەک هەبـــوو، بـــۆیە ســـەلماندنەکە بە شـــێوەیەکی ورد و دروســـت، لە ساڵی 1920 بە کۆتا گەیشت.

74 بیرکـار و فیزیکزانـی گەورەی سـەدەی هەژدە و نـۆزدەی وڵاتـی ئاڵمانیـایە. لە وتەیەکـی خۆیـدا بیرکـاری بە شـاژنی هەمـوو زانسـتەکان نـاو دەبـات. گـاوس یەکێکە لە بیرکـاریزانە هەر دیارەکـان لە هەمـوو کاتێکـدا، کە جـێ پەنـجەی لە زۆربەی لقەکـانی بیرکـاری دا دیـارە، وەک لە پێشتر باسمانکرد.

بەشی شەشەم

نەخشەکان و کالکیلەس

Functions and Calculus



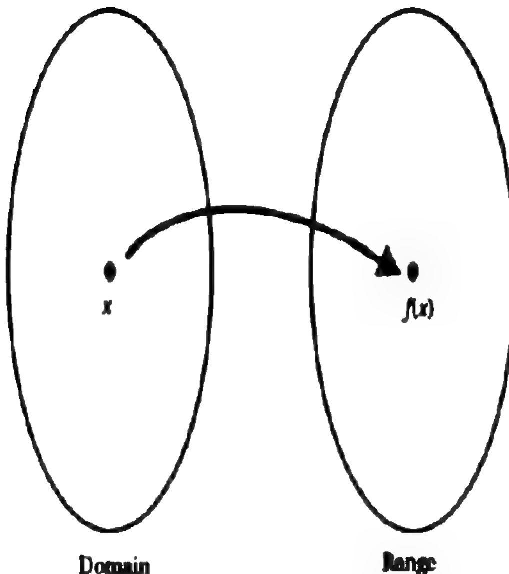
$$f : X \to Y$$

نەخشە

Function

نەخشـــە، بـــریتییە لە پەیوەنـــدییەک لە نێـــوان دوو کـــۆمەڵە A وB، بەو مەرجەی کە $A,B \neq \phi$ بـــۆ هەر دانەیەک x لە کـــۆمەڵەی A دەبێـــت تەنیـــا یەک دانەی بـــێ هاوتـــا (Unique) y هەبێـــت بەو مەرجەی کە $f(x) = y$. ئەمە پێناســـەی نەخشـــەیە. بەو x ە دەڵـــێن گـــۆڕاو، واتە تەنیـــا یەک ژمـــارە وەرناگرێـــت، زۆر ژمـــارە وەردەگرێـــت. نەخشـــە وەک عەســـارەی شـــەربەت دروســـتکردن وایە، لەســـەرەوە میوەکـــانی تێـــدەکەی، ئەویـــش گوشـــراوی ئەو میـــوانەت پـــێ دەدات. نمـــونەیەکی ســـادە، ئەگەر نەخشـــەیەکمان هەبێـت بەو شـــێوە بێـــت: $f(x) = x + 2$ واتە تـــۆ هەر نرخێـــک x بـــدەی بە نەخشـــەکە، ئەو x ەکەت پێـــــــدەداتەوە و 2 شـــــــی بـــــــۆ زیـــــــاد دەکـــــــات، واتە $f(2) = 2 + 2 = 4$. یـانی وەک ئەوە وایە یەکێـک بێـت و پێـت بڵێـت، تـۆ 2 هەزارم پێبـــدە، مـــن لە بەرامـــبەر 4 هەزارت پـــێ دەدەمەوە. هەر نەخشـــەی لەم جۆرەمـــان نیـیە، نەخشـــەکان زۆرن و ئـــی واش هەیە تـــۆزێ ئـــاڵۆزە، وەک نەخشـــە سێگۆشـــەییەکان، ڕادەدارەکـــان و نەخشـــە توانییەکـــان. بـــۆیە جـــومگەی ســـەرەکی بیرکـــاری، بـــریتییە لە نەخشـــەکان! لەســـەرەوە وتمـــان بەو x دەڵـــێن گـۆڕاو، واتە چەنـد شـتێک دەگـرێتە خـۆی، وەک عەسـارەی شـەربەت تەنیـا بـۆ شـــەربەت دروســـتکردنە، خـــۆ ناکرێـــت بچـــین ماســـی بخەیـــنە نـــاوی! بـــۆیە دەبینـــین لێـــرە x ەکە تەنیـــا میوەکـــان وەردەگرێـــت، دەشـــکرێت هەنـــدێک لە میوەکـــان نەک هەمـــووی، بـــۆیە ئەو شـــتانەی x کە دەیگـــرێتە باوەشـــی خـــۆی،

پێـــان دەوتـــرێن بـــوار (domain)- بـــواری نەخشـــەی *f*. کاتێـــک نرخێـــک دەدەیـــن بە نەخشـــەکە، ئەویـــش شـــتێکمان پێـــدەداتەوە و شـــتێک بەرهەم دێنیـــت، ئەوە بەو بەرهەمە دەوترێـــت: مەودا (Range)- مەودای نەخشـــەی *f*. یـــانی کە لە عەســـارەکە شـــەربەت دروســـت بـــوو، ئەوە بە شـــەربەتەکە دەوترێـت مەودا، وە بە میوەکـــان بە شـــێوەی سروشـــتی خۆیـــان پـــێش ئەوەی بیخەیـنە نـاو عەسـارەکە پێـی دەوتـرێن بـوار، هەنـدێ جـار پێـی دەڵـێن: وێنە-image. پیتـی *f* هەر لە پیتـی یەکەمـی *function* هـاتووە، تـۆ ئەگەر حەزت لێـیە، پیتـی یەکەمـی نـاوەکەت یـان هەر پیتێـک و ڕەمزێکـت دەتـوانی بەکاری بێنیت.



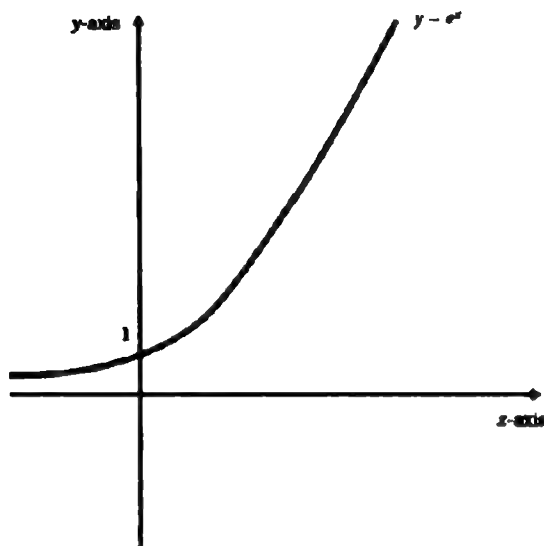
نەخشەی توانی

The exponential Function

نەخشـــەی تـــوانی، مـــومکینە گرنگتـــرین و بەرچـــاوترین نەخشـــە بێـــت لە بیرکاریـــــدا، هاوکـــــات لەگەڵ نەخشـــــەی خـــــۆیی (Identity function). نەخشـــەی تـــوانی، بەم شـــێوەیە پێناســـە کـــراوە کە $f(x) = b^x$ کاتێـــک b بـــــریتییە لە بنچیـــــنە؛ کە ژمـــــارەیەکی نەگـــــۆڕە و، x گـــــۆڕاوەکەیە، وەک: $f(x) = e^x$ نەخشـــــەیەکی هەمیشـــــە ئەرێنیـــیە، واتە ئەگەر بێـــت و x لە $-\infty$ نزیـک بکەیـنەوە، ئەوکـات نەخشـــەکە لە سـفر نزیـک دەکەوێـتەوە. وێـنەی ئەم نەخشـــــەیە بەرز و نزمـــــی، نشـــــێوی تێـــــدا نیـــــیە، وەک ئەوە وایە بەردەوام بەســـەرکەوی، واتـــا تـــا دێـــت وێـــنەی نەخشـــەکە بەرز دەبێـتەوە. ئەوەی زۆر جـــــوان و ســـــەرنج ڕاکێشـــــە لەو نەخشـــــەیە، ئەوەیە کە لاری وێـــــنەکەی دەکـــاتەوە نرخـــی نەخشـــەکە! ئەوە واتـــا چـــی؟ واتە لاری نەخشـــەکە لە هەر خاڵێـــک x تەنیـــا نرخـــی x لە نەخشـــەکە دانێـــوە ئەوە لاری ئەو نەخشـــەیەت لەو خـــــاڵە دەســـــت دەکەوێـــــت، بە کـــــورتی واتە تـــــاکە نەخشـــــەیە کە داتاشـــراوەکەی دەکـــاتەوە نەخشـــەکە خـــۆی: $f(x) = f'(x)$. ئەم نەخشـــەیە دیـــاردەی هەمەچەشـــنمان بـــۆ ڕوونـــدەکاتەوە، وەک گەشـــەی ڕووەکەکـــان، پەتـا، شـــیبوونەوەی مـادەیەکی تیشـــکدەر و گەشەســـەند و چەنـــدین شـــتی تـــر لە ڕێـــگەی ئەم نەخشـــەوە لێیـــان تێـــدەگەین. لە پـــاڵ ئەمەش، ئەم نەخشـــەیە هەوێنـــی بونیـــاتی چەنـــدین نەخشـــەی تـــرە، سەردەکێشـــێتە نـــاو چەنـــدین بـــابەتی تـــری بیرکـــاری و لـــقە جیاجیاکـــانی بیرکـــاریش! ڕەنـــگە یەکێـــک بپرســـێت ئەو e

چییە (پێشتر باسمان کردووە)؟ ئەوە ژمارەیەکە، نەگۆڕێکی بیرکارییە کە نرخەکەی بە نزیکی دەکاتە 2.71 کە بە نەگۆڕی ئۆیلەر ناسراوە، ئۆیلەریش یەکێکە لە بیرکاریزانە هەرە دیارەکانی ناو بیرکاری. ئەم نەخشەیە دەتواندرێت لەسەر شێوەی زنجیرە بنووسرێت:

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = e^x$$



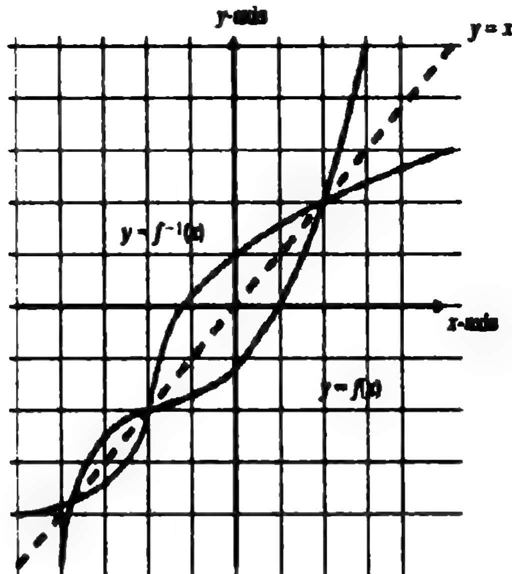
ئەم نەخشەیەی سەرەوە نەک هەر داتاشراوەکەی دەکاتەوە خۆی، بەڵکو تەواوکارییەکەشی هەر دەکاتەوە خۆی (لە گۆڕاوی X)

هەڵگەڕاوەی نەخشە

Inverse function

هەڵـگەڕاوەی نەخشــە، بــریتییە لە کــاری پــێچەوانەی نەخشــەی بنەڕەتــی کە بە $f^{-1}(x)$ دەنووســرێت. وەک چــۆن دەزانــین کە کــرداری پــێچەوانەی کــۆکردنەوە بــریتییە لە کــرداری کەم کــردنەوە، وەک: دژە کــۆکردنەوەی 3 بــریتییە لە 3-، یــان دژە لێکــدانی 7 بــریتییە لە $\frac{1}{7}$. لە بــابەتی پێشــوو وتمــان $f(x) = x + 2$، واتە کــابرایەک هەبــوو، دەیــوت، تــۆ ئەگەر 2 دینــارم بــدەیتێ، ئەوە مــن 4 دینــارت پــێ دەدەم، ئێســتا وا دانــێ کــابرا دێــت پەخەت دەگرێــت و پێــت دەڵێــت هــا ئەوە 5 دینــار، تــۆ دەبێــت چەنــدی پــێ بــدەیت؟ تــۆ دەبێــت 7 دینــاری پــێ بــدەیت! ئــا بەمە دەوترێــت نەخشــەی هەڵــگەڕاوە (Inverse function). نەخشــەی هەڵــگەڕاوە بــۆ ئەو نەخشــەی ســەرەوە دەکــاتە: $f^{-1}(x) = x - 2$. لە نەخشــەی $f(x)$ ئەگەر 8 پــێ بــدەین، ئەوە 10 دەداتــێ، لە نەخشــەی هەڵــگەڕاوەی $f^{-1}(x)$ ئەگەر 10 پێبــدەین، دەبینــین 8 دینارەکەمــان پــێ دەداتەوە. لە بــابەتی پێشــوو نەخشــەی خۆیمــان (Identity function) خوێنــد، واتە $f(x) = x$، کە ئەو نەخشــەیە رێــک وەک ئــاوێنە وایە، چیــی بخەیــتە بەردەمــی، هەر هەمــان شــت نیشــان دەداتەوە، کەواتە نەخشــەی هەڵــگەڕاوەی نەخشــەی خــۆیی چیــیە؟ دیــارە هەر خــــۆیەتی، واتە $f^{-1}(x) = x$. نەخشــــەی توانیمــــان خوێنــــد، وەک: $f(x) = e^{x}$ هەڵــگەڕاوەی ئەو نەخشــەیە دەکــاتە لۆگــاریتمی سروشــتی، واتە نەخشــــەی لۆگــــاریتمی $f(x) = ln\,(x)$. نەخشــــەی لۆگــــاریتمی

سروشـــــتی وەک ڕووبەری نـــــاوچەیەک دەردەکەوێـــــت، هەر بـــــۆیە تەواوکـــارییەکەی $y = \frac{1}{x}$ کاتێــک لە $ln\ (n)$ هەژمـــاری ڕووبەری چەمــاوەی 1 بــۆ n بێــت. لەگەڵ ئەو تایبەتمەنــدییە جــوانەی نەخشـــەی لۆگـــاریتمی سروشــتی، شــتێکی تــر هەیە کە زۆر سەرســامکەرە، ئەوەش بە کاردێـت بـۆ زانینـــی ئەوەی کە ئایــا لە خــوار ژمــارەی x چەنــد ژمــارەی خــۆبەش هەیە، واتە لە خـــوار 100 چەنـــد ژمـــارەی خـــۆبەش هەیە بە نزیکەیـــی، کە لە بابەتەکانی داهاتوو باسی لێوەدەکەین.



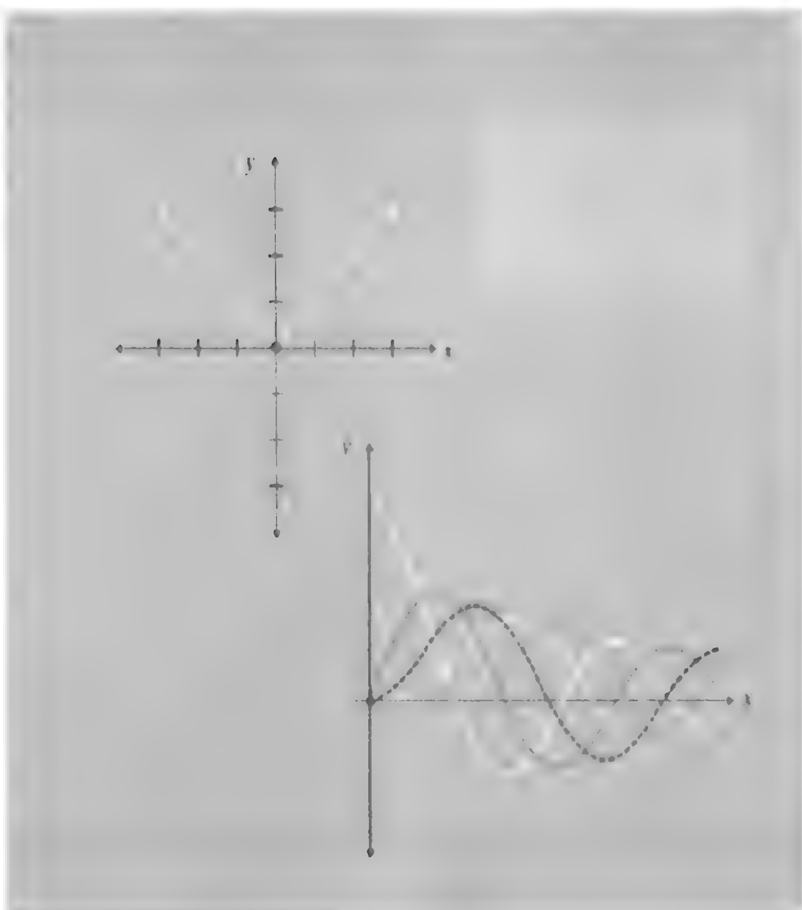
وێـــــنەکە دوو نەخشـــــە دەنووێنێـــــت، ئەوانـــــیش نەخشـــــەیەک و هەڵگەڕاوەکەی.

نەخشەی بەردەوام

Continuous Function

نەخشــەی بەردەوام، یــان بەردەوامــی نەخشــە؛ ناولێنــانی بیــرۆکەیە کە ئایــا نەخشــەیەک دەتوانــدرێت وێــنەکەی بکێشــین بەو مەرجەی لە کــاتی کێشــانی دەســت هەڵنەگــرین و بۆشــایی و پچــران لە وێنەکە دروســت نەبێــت. بە پــێچەوانەی نەخشــەی نــا-بەردەوام کە کــاتێ وێــنەی نەخشــەکە دەکێشــین، ئەوە ناچــار دەبــین کە لە شــوێنێک یــان چەنــد شــوێنێک دەســتمان هەڵگــرین پاشــان دەســت بە کێشــانی وێــنەکە بکەیــنەوە، دیاریشــە کە ئەمە بچــران و بۆشــایی دەخــاتە نــاو وێــنەکە. بــا بێــنەوە ســەرە نمــونەی عەســارەی شــەربەتەکە، گریمــان ســندوقێک هەنــارت لایە، دانە بە دانە دەیــانخەیتە نــاو عەســارەکە، گریمــان دانەیەک دەخەیــتە نــاو عەســارەکە بەڵام هــیچ ئــاوێکی نیــیە! واتە ئەو دانەیە ئــاوی نەبــوو (وشــک بــوو)، بــۆیە لیــرە کێشــەیەک دروســت دەبێــت، واتە لە نەخشــەی $f(x)$ نرخێــک هەیە، بــا بڵــێن ئەو نــرخە بــریتییە لە k، کاتێــک k لە نەخشــەکە دادەنێــنەوە، هــیچ شــتێکمان دەســت ناکەوێــت، وە یــان شــتێکی تەلیســماوی ڕێگەپێنەدراومــان دەســت دەکەوێــت، بــۆیە هەر نەخشــەیەک تووشــی کێشــەی لەم شــێوەیە هــات، ئەوە بەو نەخشــەیە دەوترێــت: بەردەوام نیــیە. نەخشــەی بەردەوامــیش واتە هــیچ پچرانێکــی تێــدا نیــیە، هەر گۆڕانکــارییەکی بچــوک لە x بەهەمــان شــێوە گۆڕانکــارییەکی بچــوک لە نەخشــەکە دروســتدەکاتەوە، ئەم بیــرۆکەیەش هاوشــێوەی دۆزیــنەوەی ئامانجەکــانە لە زنجیرەکــان و یەکــبەدوای یەکەکــان،

بەڵام ئەمەش کـــارێکی هەروا ســـادە نیـــیە بـــۆ ئەوەی بـــزانین کە ئـــاخۆ نەخشـــەیەک بەردەوامە یـــان نـــا، چەنـــدین ڕێگـــا هەن، وەک ڕێگـــای پێناســـە، یانیش ئەو بیردۆزانەی کە لە ڕێگەی پێناسەکەوە هەڵچهراون.



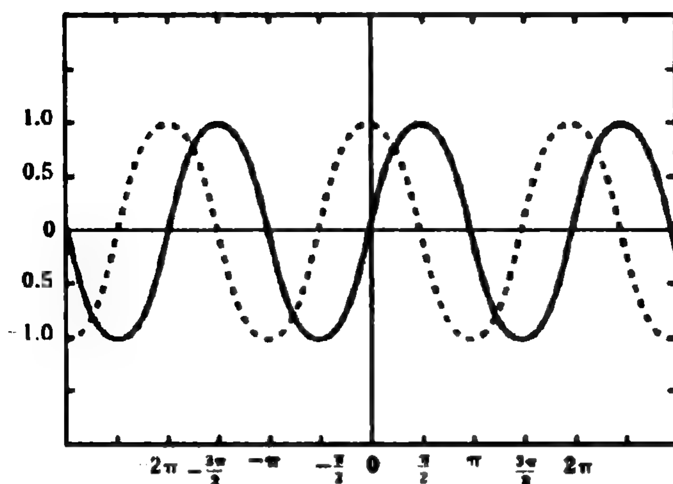
نەخشە سێگۆشەییەکان

Trigonometric Functions

نەخشـــە سێگۆشـــەییەکان، ئەو نەخشـــانەن کە گـــۆڕاوی نەخشـــەکە گۆشـــەن-Angel، کە ســــــەرەکیترینیان بـــریتین لە نەخـــــــشەکانی $f(x) = sin(x)$ و $f(x) = cos(x)$ ، $f(x) = tan\ (x$،

کە پێـــان دەڵـــێن: نەخشـــە سێگۆشـــەییەکان. مەبەســـتمان لێـــی ئەو سێگۆشـــەیە کە گۆشـــەیەکی پـــلە 90 هەیە، واتە سێگۆشـــەیەکی گۆشـــە وەســـتاو. لەگەڵ ئەمەش، ئەم نەخشـــانە بەکارهێنانیـــان زۆرە لەو دیـــوی ئەنـــدازەوە، بەکارهێنـــانی لە زۆر بـــابەتی هەمەجـــۆر هەیە بـــۆ لێکـــدانەوە و تێگەیشـــتن لە هەنـــدێک دیـــاردە. کاتێـــک دێـــن وێـــنەی ئەو نەخشـــانە دەکێشـــین، ئەوە وێـــنەکەی کڵێشـــەیەکی-دووبـــارەبوونەوەی ڕێـــک پیشـــان دەدات، بەجۆرێـــک بـــۆ هەر خولێـــک 360 یان 2π ، ئەوە وێـــنەکە خـــۆی دووبـــارە دەکـــاتەوە، بـــۆیە بەو نەخشـــانە دەوتـــرێن نەخشـــەی خـــولی-دەوری وە بە ئینگلیـــزی پێـــی دەوترێـــت Period. ئەمەش گرنگییەکـــی زۆری هەیە لە خوێنـــدنی فیزیـــا و بە تـــایبەت لە بـــابەتی شـــەپۆلەکان. نەخشـــەی ســـاین نەخشـــەیەکی تـــاکییە (odd funcrion)، چـــونکە $sin(-x) = -sin\ (x)$ ،واتە وێـــنەی نەخشـــەی ســـاین، وێـــنە دانەوەیە بە دەوری خـــاڵی بنەڕەتـــی تەوەرەی پۆتـــان(0,0). کۆســـاین نەخشـــەیەکی جـــووتییە (even function)، چـــونکە $cos(-x) = cos\ (x)$ ، واتە وێـــــنەی نەخشـــــەی کۆســـــاین وێـــنەدانەوەیە بە دەوری تەوەرەی y لە ڕووتەختـــی پۆتانـــدا. نـــاوی ســـاین لە

بەمانـای کەوانەیـی دێـت، وە "کـۆ سـاین" هەر لە ساینەوە پەیـدابووە، ئەگەر سـەرنج بـدەین کـۆ-سـاین (Cosine)، لێـرە ئەم (کـۆ-co) لە وشـە ئینگلیـزییەکە وەرگیـراوە (Complimentary of sine) . هەردەم مەودای ئەو نەخشـانە لەنێـوان 1- و 1 دایە، واتە مەودای ئەم نەخشـەیە لە نێوان ئەم دوو بەهایە تێپەڕناکات.



هێڵکـارییە پچڕپچڕەکـان نەخشـەی کۆسـاین دەنوێنێـت، وە هێڵکـارییە ئاساییەکە وێنەی نەخشەی ساین دەنوێنێت.

بیردۆزی بەهای ناوەندی

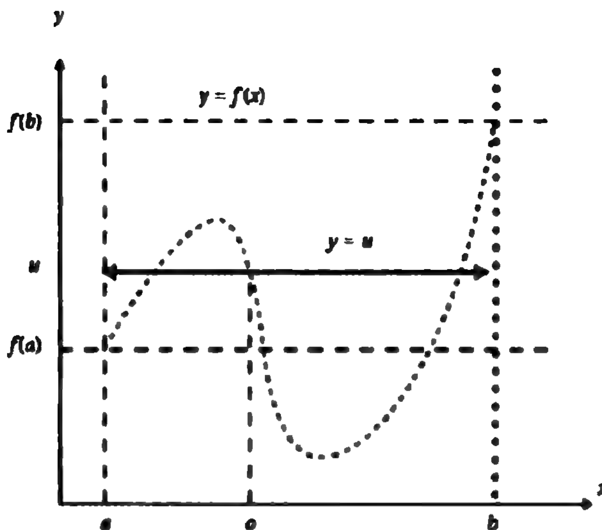
The intermediate value theorem

بیــردۆزی بەهــای ناوەنــدی، بیــردۆزێکە لە مەڕ نەخشــە بەردەوامەکــان، ئەو نەخشـــانەی کە دەتـــوانین وێنەکەیـــان بکێشـــین بـــێ ئەوەی دەســـتمان هەڵگرین و وێنەکە بۆشایی بکەوتێ. دەقی **بیردۆزەکە دەڵێت:**

بـــۆ هەر نەخشـــەیەکی بەردەوام، هەر ژمـــارەیەکy لە نێـــوان دوو ژمـــارەی تـــری مەودای نەخشـــەکە، ئەوە لە بـــواری نەخشـــەکە، ژمـــارەیەک هەیەx کە لە ڕێگەی نەخشەکەوە دەمانهێنێت بۆ ئەو ژمارەیە $f(x) = y$.

واتە، بە هـــیچ شـــێوەیەک بازدانێـــک یـــان بۆشـــاییەک لە مەودای نەخشـــەکە بـــوونی نیـــیە. نمـــونەیەک: ئەگەر نەخشـــەیەکمان هەبێـــت، 10 و 20 ی پێبـــدەین، ئەویـــش لە بەرامـــبەر 20 و 40 مـــان پێبـــداتەوە. ئەگەر لە نێـــوان 20 و 40 هەر ژمـــارەیەک هەڵبژێـــرین، ئەوەی دەبێـــت لە بـــواری نەخشـــەکە ژمـــارەیەک هەبێـــت بمـــانهێنێتەوە بـــۆ ئەو ژمـــارەی هەڵمـــانبژارد، واتە لە نێـوان 10 و 20 دەبێـت ژمـــارەیەک هەبێـت. بـا بێـنەوە ســـەر نمـونەی عەســارەی شـــەربەتەکە، تـــۆ لە کۆمەڵێـک میـوە شـــەربەتێکی کۆکتێلـت دروســت کـــرد، هەر میـــوەیەک بە ڤیتامینێـــک یـــا ســـودێک ناســـراوە، ئەگەر بێـــت و شـــەربەتەکە بەریـــنە تـــاقیگە، دەبینـــین ڤیتـــامین k لە نـــاو شـــەربەتەکە هەیە، واتە: ئـیلا-حەتـمەن لەوســـەر کە شـــەربەتەکە دروســـتکراوە، مـــۆزی تێـدابووە. ئەمە هەمـــووی لەســـەر نەخشـــەی بەردەوام قســـەی لەســـەر دەکرێـــت، بەڵام

هەنـــدێ نەخشـــە هەن، لەگەڵ ئەوەی بەردەوامـــیش نیـــنە، بەڵام لە مەودایەک ئەوشـــتە هەر جـــێ بەجـــێ دەکەن. ئەم بیـــردۆزە بـــۆ ســـەلماندنی زۆرێـــک لە بـــابەتی تـــر بەکاردێـــت، کە دەتـــوانین لە ڕێـــگەی ئەم بیـــردۆزی بگەیـــنە ئەوەی کە بـــۆ هاوکێشـــەیەک، 'شـــیکار' بـــوونی هەیە یـــان نـــا. هەروەهـــا ئەم بیـــردۆزە وەک کەرەســــــــــتەیەک وایە بــــــــۆ بیـــــــــــردۆزی لەفەی گۆشــــــــت (Ham sandwich theorem) واتە کاتێـــک پـــارچە گۆشـــتێکمان هەیە لە نێـــوان دوو پـــارچە نـــان-ســـەمون، کـــاتی گەزەی لـــێ دەدەی، ئەوە بە دڵنیـــایی گەزەت لە هەردوو پـــــارچەکە داوە، ئـــــێ کە گەزەت لە هەر دوو پـــــارچەکە دەدەی، ئەوە بە دڵنیایی گۆشتەکەش گەزەکەی بەردەکەوێت.



کالکیلەس

Calculus

جیاکـــاری و تەواوکـــاری-کـــالکیلەس، ســـەرەکیترین لقـــی بیرکـــاری، کە بەگشـــتی دەربـــارەی گـــۆڕانە-خێرایـــی و تـــاودان (chang). بە گشـــتی دوو شـــت دەگـــرێتە خـــۆی، ئەوانـــیش داتاشـــراو و تەواوکـــاری، هەر بـــۆیە پێـــی دەوترێـــت جیاکـــاری و تەواوکـــاری. لە داتاشـــراو ڕێـــژەی گـــۆڕان و لە تەواوکاریـــدا ڕووبەری ژێـــر چەمـــاوەیەک هەژماردەکـــات، یـــان نەخشـــەی بنەڕەتـــی بـــۆ نەخشـــەیەک کە داتاشـــراوەی وەرگیـــراوە. هەمـــوو ئەو بیرکـــارییەی بەر لە کـــالکیلەس فێـــری دەبـــین، گشـــتی بیرکـــاری وەســـتاوە-جێگیـــر (Static)، لەکاتێـــک جیاکـــاری و تەواوکـــاری بیرکـــاری جـــوولەن (Dynamic). قوتـــابی هەر لە قۆنـــاغی ئامـــادەیی ئاشـــنایەتی لەگەڵ کەڵکـیلەس پەیـدا دەکـات. وشـەی کەڵکـیلەس بە واتـای وردە بەرد دێـت لە بنەڕەتـدا، واتە بـۆ ژمـاردن. داتاشـراو و تەواوکـاری هەردووکیـان لە بابەتێـک هاوبەشـیان هەیە، ئەوانـیش لە ئامانجەکـان (Limits)، هەم لە دۆزیـنەوەی گـــۆڕان-ئامـــانج بەکاردێنیـــت، هەم لە دۆزیـــنەوەی ڕووبەری ژێـــر چەمـــاوەیەک-ئامـــانج بەکاردێنـــت، وە زۆر بە وردی بە دوای ئەم پرۆسـەیەوەیە. گرنگتـرین بەکارهێنانەکانیـان لە خوێنـدنی خێرایـی، کێشـکردن و تـاودان، کە بـۆ هەر یەکێـک لەم بابەتـانە، بنـاغەکەی لە کەڵکیلەیسـەوە سـەرچاوەدەگرێت و فۆرمـولە دەکرێـت. بیـرۆکەی پشـت کـالکیلەس، بـریتییە لەو پەیوەنـدییە نـاوازەییەی کە هەیە لە نێـوان گـۆڕانێکی بچـوک لە نێـوان

بــوار و مەودا، واتە ئەو ژمــارەی بە نەخشــەکەی دەدەیــن و ئەو ژمــارەی نەخشــەکە پێمــان دەداتەوە. "بیرکــاری کــرداری-Applied maths" پشــت بە کــالکیلەس دەبەســتێت بــۆ کــارکردن، چــونکە بەشــێکی زۆر لە دیاردەکــان لە فیزیــا و کیمــا و بوارەکــانی تــر بەگشــتی بە هــۆی کالکیلەســەوە وەســف دەکرێن و لێکدەدرێنەوە.



ڕێژەی گۆڕان

Rates of change

بەهۆی وێنەی نەخشەوە، دەتوانین ئەو ڕێژەی گۆڕانە ببینین کە لە نەخشەکە ڕوودەدات. ئەگەر بێت و وێنەی نەخشەکە بەرز و نزمی تێدا بێت، ئەوە ئەو گۆڕانەی ڕوودەدات زۆر خێرا دەبێت، بەڵام ئەگەر بێت و تەنیا لەسەر یەک ڕەوت (بەرز و نزمی تێدا نەبێت) بێت، ئەوە ئەو گۆڕانەی ڕوودەدات، زۆر کەم دەبێت، کە ئەمەش لێکچوونێکی فیزیکی هەیە.

مەبەست لەگۆڕان لێرە بریتییە لە لاری نەخشەکە، واتا لە تەوەری x ئەو گۆڕانەی ڕوودەدات لە بەرامبەر بەرزییەکە چۆن دەگۆڕێت لە تەوەرەی y؟ بۆ نەخشەی هێڵی، لاری نەخشەکە نەگۆڕێکە، کە لاری نەخشەکە لە هەمووشوێنێکی نەخشەکە هەر هەمان شتە، ئەگەر سەیری نەخشەی هێڵی بکەین، دەبینین کە: $y = mx + b$ کاتێک m لاری نەخشەکە دەنوێنێت. بەگشتی بۆ نەخشەکانی تر، دەبێت خاڵێک دەست نیشان بکەین بۆ ئەوەی لاری نەخشەکە لەو خاڵە بدۆزینەوە، چونکە وێنەی هەر نەخشەیەک بە دەر لە وێنەی نەخشەی هێڵی و نەخشەی نەگۆڕ، ئەوانی تر وێنەکانیان چەماوەن (Curve). بۆ دۆزینەوەی لاری نەخشەیەک لە خاڵێک، ئەوە پێویستمان بە خاڵێکی تر دەبێت. وەک چۆن ئەگەر بمانەوێت تانکییەک بەرینە سەربان، ئەوە دوو کەسی دەوێت، لەو دوو کەسە دەبێت، یەکێکیان خۆت بیت، ئەوی تر هەر کەسێک بێت کێشە

نییە. دۆزینەوەی لاری نەخشەیەک لە خاڵێک، واتا دۆزینەوەی داتاشراوی ئەو نەخشەیە، پاشان دانانەوەی خاڵەکە؛ لە داتاشراوی نەخشە بنەڕەتییەکە، ئەوە لاری ئەو نەخشەیەمان دەست دەکەوێت لەو خاڵەی مەبەستمانە.

لاری نەخشەی نەگۆڕ دەکاتە سفر، نموونە وەک: $f(x) = 5$ وێنەی ئەم نەخشەیە هێڵێکی ڕاستی ئاسۆییە، کە لارییەکەی سفرە. بەڵام بۆ ڕاستەهێڵێکی ستونی، لاری پێناسە نەکراوە، بۆ نموونە $x = 5$. لێرە پرسیارێک دروست دەبێت، بۆچی لاری نەخشەی نەگۆڕ-ژمارە سفرە؟ وادانێ لە ڕۆژێک پلەی گەرمی لە کاتژمێر 12 تا 6 ی دوای نیوەڕۆ بە بەردەوامی 40 پلە بوو. ئێستا، بەرزی و نزمی لە پلەی گەرمی لەو مەودایە چەند بوو؟ دیارە کە بەرزی و نزمی ڕووی نەداوە، بۆیە ڕێژەی گۆڕان-بەرزی نزمی سفرە. بۆ نەخشەی هێڵی، کاتێک وێنەکەی هێڵێکی لارە، ئەمەش دەکرێت بڵێین: لە کاتژمێر 3 شەو بۆ 7 بەیانی، پلەی گەرمی وردە وردە دادەبەزی، بۆ هەر کاژێرێک 2 پلە دادەبەزی، ئەمە واتە ڕێژەی گۆڕان-لاری بریتییە لە 2

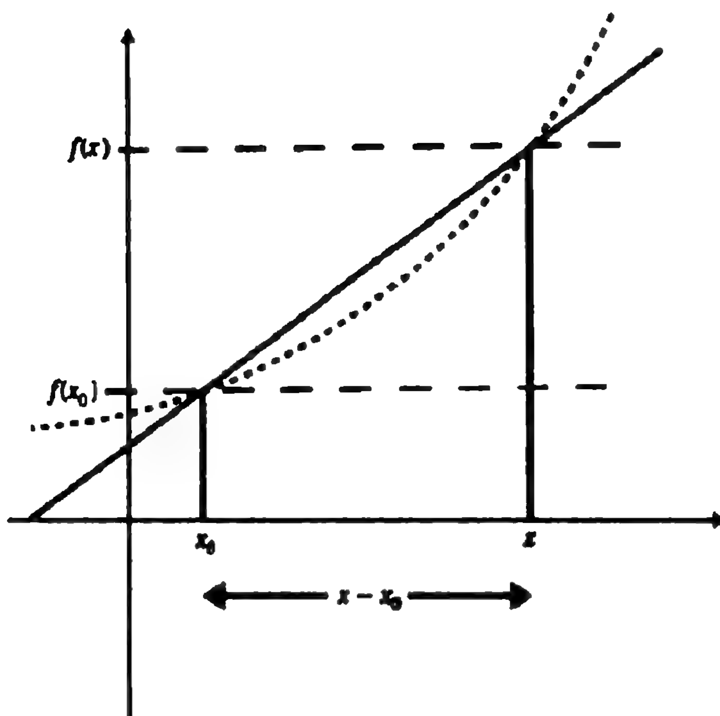


جیاکاری

Differentiation

جیاکــاری، یەکــێکە لە چەمــکە هەرە گرنگەکــانی کــالکیلەس. کە تێــدا لە ڕێــگەی بەکارهێنــانی هاوکێشــەوە دەکرێــت لاری نەخشــەیەک بــدۆزینەوە، واتە ڕێــژەی گــۆڕان بــدۆزینەوە لە خــاڵێکی دیــاریکراو. ســادەترین پەیوەنــدی لە نێــــوان دوو گــــــۆڕاودا، هاوکێشـــــەی هێڵـــــی؛ یەکــــێکە لەوان، $f(x) = mx + c$ کاتێــک کە m لاری نەخشــەکە دەنوێنێــت. ئەگەر نرخێــک جێگیــر بکەیــن و نــاوی لــێ بنــێین x_0 لەســەر تەوەری x دا، پاشــان لاری نەخشــەکە لە خــاڵی x داواکــراوەکە بێــت، ئەوە بــریتییە لە ئەو گــۆڕانەی ڕوودەدات لە x دا، وە y کە مەبەســـــتمان $f(x)$. ئەم بــــڕانەش دیــــارە کە دەکــــاتە: $x - x_0$ و $f(x) - f(x_0)$ وەک لە وێــــنەکەی خوارەوەشــــدا دیــــارە. دۆزیــــنەوەی لاری لە خــــاڵی x_0 گــــرنگە لە دۆزیــــنەوەی m کە بە نزیکەیــــی یەکســــانە بــــە $m(x - x_0)$، چــــونکە x بە $f(x) - f(x_0)$ لار دەبێــتەوە بەرەو x_0 بە **دەربڕینێکــــی تــــر**، $x - x_0$ و $f(x) - f(x_0)$، ئەو دوو بــڕە کەی یەکســان دەبــن؟ بــڕەی $x - x_0$ جــارانی چ ژمــارەیەک m بکەیــن یەکســان دەبێــت بە $f(x) - f(x_0)$ ؟ هەرکاتێــک ئەو لاریــیە m بــۆ نەخشــەکە بــوونی هەبــوو، ئەوە پێــی دەوترێــت لاری نەخشــەکە-داتاشــراوەی نەخشەکە.

داتاشـراوەی نەخشـەی f بەم شـێوەیە $f'(x)$ گوزارشـتی لـێ دەکرێـت یانیش $\frac{df}{dx}$.[75]



[75] لە سـاڵی 1675، "لایبینـز" دەسـتەواژە- دەربڕینـی $\frac{df}{dx}$ ناسـاند بـۆ جیاکـاری-داتاشـراوە، دوای 95 سـاڵ "لاگـرانج" یەکەم کەس بـوو، دەسـتەواژە- دەربڕینـی $f'(x)$ بەکارهێنـا بـۆ داتاشراوەی یەکەمی نەخشەیەک.

دۆزینەوەی داتاشراوە

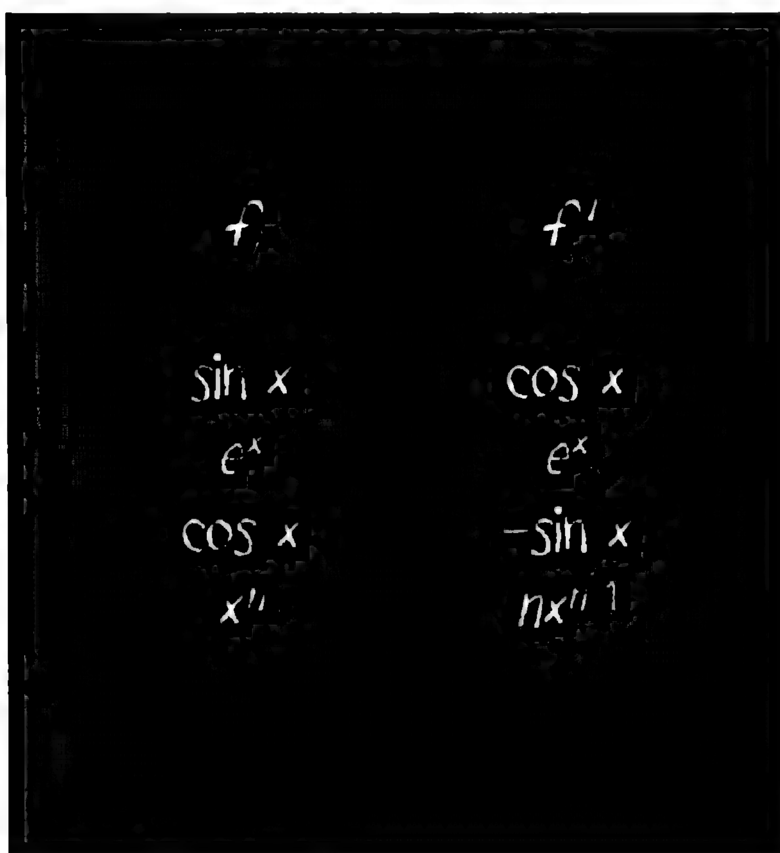
Calculating Derivative

هەر وەک لە بابەتەکانی پێشوو وتمان چەند جۆرێک نەخشەمان هەیە. بۆیە دۆزینەوەی داتاشراوەی هەر نەخشەیەک جیاوازە لەگەڵ یەکێک-جۆری تر. یەکێک لە نەخشەکان بریتییە لەو جۆرە نەخشانە: $f(x) = x^n$ کە داتاشراوەکەی دەکاتە: $f'(x) = nx^{n-1}$ کاتێک n بریتییە لە توانی ڕەسەنی نەخشەکە.

داتاشراوەی $f(x) = x^2$ دەکاتە: $f'(x) = 2x$، بۆ نەخشەکانی x^3 و x^7 بە هەمان شێوە. بۆ نەخشەکانی تریش لەو شێوەی خوارەوە هەندێکیان داتاشراوەکانیان نووسراوە. ئەگەر بێت و نەخشەی $f'(x)$ خۆی توانای داتاشراوەی هەبێت، ئەوە دووبارە دەتوانین داتاشراوی بۆ وەرگرینەوە، واتە داتاشراوەی دووەم بۆ هەر هەمان ئەو نەخشەی سەرەوە کە نووسیومانە، کە داتاشراوەی دووەمی نەخشەکە دەکاتە: $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. بۆیە دووبارە بەهەمان شێوە ئەگەر n مین داتاشراوەی نەخشەکە بدۆزینەوە، ئەوە بەو شێوە ئاماژەی پێ دەکەین: $f^{(n)}(x)$.

بۆ ئەم جۆرە نەخشەی سەرەوە کە نووسیومانە، ئەوە بە زیاتر وەرگرتنی چەندین جار داتاشراوەکەی، ئەوە توانی نەخشەکە وردە وردە بچوک دەبێتەوە و کۆلکەی گۆڕاوی نەخشەکە گەورە و گەورەتر دەبێت،

بەڵام بە بەردەوام بوون لەو کارە، لە کۆتایی لە شوێنێک بە وەرگرتنی داتاشراوەی نەخشەکە، نەخشەکە دەبێتە سفر، وەک چۆن نەخشەی $f(x) = 2x$ بە داتاشراوەی دووەم نەخشەکە دەبێت بە سفر: $f''(x) = 0$.



پێکبەستنەوەی نەخشەکان

Combining functions

پێکبەستنەوە، واتە چەند نەخشەیەکمان هەبێت، لێکی بدەین و نەخشەیەکی نوێ دروست بکەین لە ڕێگەی ئەو چەند نەخشەی هەمانە.

بۆ ئەو مەبەستە دوو ڕێگای سەرەکی هەن، ئەوانیش: کردارەکان لەسەر نەخشەکان (کەم، کۆ، جاران و دابەش)، یان ئاویتەکردنی نەخشەکان. ئەگەر دوو نەخشەمان هەبێت $g(x)$ و $f(x)$ ئەوە بە ڕێگای یەکەم، ئەگەر بێت و دوو نەخشەکە بەهۆی کرداری جاران-لێکدان، لێکدانی یەکتری بکەین، واتە: $f(x).g(x)$ ، وەک: ئەگەر $f(x) = x^2$ و $g(x) = sin(x)$ ئەوە لە ڕێگەی لێکدانی ئەو دوو نەخشەیە، نەخشەیەکی نوێمان دەست دەکەوێت تاوی دەنێین: $h(x) = sin(x)\, x^2$.

ئاویتەکردنی دوو نەخشە بەو شێوە دەکرێت $g(f(x))$ یان $f\big(g(x)\big)$ ، دیاریشە کە ئەم دووانە یەکسان نین.

$$f\big(g(x)\big) = f(sin(x)) = (sin(x))^2$$

$$g\big(f(x)\big) = g(x^2) = sin(x^2)$$

دۆزینەوەی داتاشراوەی ئەم نەخشانەش بە بەکارهێنانی یاسای زنجیر (Chain rule) دەکرێت، کە لە خوارەوە بە وێنە ڕوونکراوەتەوە چۆن.



تەواوکاری

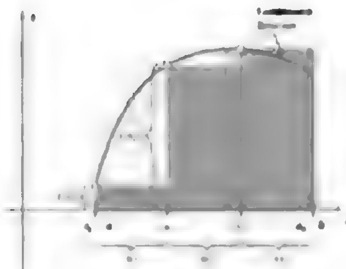
Integration

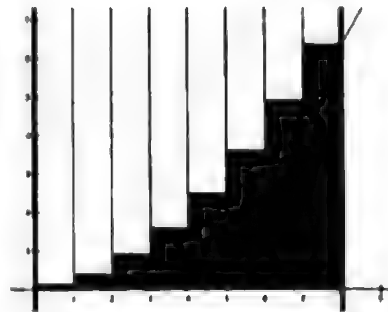
مەبەست لەتەواوکاری، بریتییە لە دۆزینەوەی ڕووبەری بن-ژێر چەماوەیەک یا وێنەیەک کە سنورێکی هەیە. لە خوارەوە ئەگەر سەرنجی چەماوەی نێوان هەر دوو خاڵی a و b بدەین: دەبینین دۆزینەوەی ئەو ڕووبەرە ئاسان نییە، چونکە شێوەکەی ڕێک نییە تا یاسای ڕووبەر شێوە زانراوەکان بەکاربێنین، ئێمە یاسای ڕووبەر تەنیا بۆ تەنێکی شێوە زانراوی وەک، بازنە، سێگۆشە، چوارگۆشە و لاکێشە دەزانین، بۆیە بۆدۆزینەوەی ڕووبەرێکی لەم شێوە، ئەوە پێوستمان بە تەواوکاری هەیە.

بیرۆکەکەش ئەوەیە: سەرەتا ئەو ڕووبەری دەمانەوێ بیدۆزینەوە بە چەند پارچە هێڵێک، بەش بەشی دەکەین، وادانێ لەسەرەتا دەیکەینە سێ بەش، وەک لە وێنەکەدا دیارە، ئەو سێ بەشە لاکێشەن، ئێمەش ئەزانین ڕووبەری لاکێشە چۆن دەدۆزێتەوە، ئەویش درێژی جارانی پانی، بۆیە ڕووبەری هەرسێ لاکێشە دەدۆزینەوە، پاشان هەر سێکیان بەیەکەوە کۆدەکەینەوە، ڕووبەرەکەمان دەست دەکەوێت، بەڵام بە نزیکی، چونکە ئەو ژمارەی دەستمان دەکەوێت ڕاستەقینە نییە، لەبەر ئەوەی هەندێک کەم و کوری هەیە، واتە ئەگەر سەیری لاکێشەی یەکەم بکەین، دەبینین لە بەشی سەرەوە، هەندێ ڕووبەرەکە لە دەرەوەی چەماوەکەیە، لەوەی دوای ئەو، لەسەر لاکێشەکە بەشێک بەجێ ماوە، لە لاکێشە بچوکەکە، مەسافەیەک زۆرمان بەجێ هێشتووە! ئەی چارەسەر؟

چارەسەرەکە ئەوەیە هەتا زیاتر لاکێشە دروست بکەین، ئەوە زیاتر و زیاتر لە نرخی راستەقینەی ڕووبەرەکە نزیک دەکەوینەوە، بەجۆرێک ئێمە لە بیرکاری ژمارەی ئەو لاکێشانە بۆ ناکۆتا نزیک دەکەینەوە، بەو شێوەش ڕووبەری راستەقینەمان دەست دەکەوێت. لە وێنەی دوای ئەو ژمارەی لاکێشەکانمان زیاتر کردووە، بۆیە وەک دیارە کەم بەش هەیە فەرامۆشمان کردبێت. بۆیە دۆزینەوەی ڕووبەری لەم شێوە ،بەهۆی یاسای تەواوکارییەوە دەکرێت، کە بریتییە لە: $\int_a^b f(x)dx$ واتە دۆزینەوەی ڕووبەری نەخشەی f لە ماوەی a و b دا کاتێک $a < b$.

ئەو تەواوکارییەی ئێمە لە قوتابخانە خوێندوومانە، هەتا ئەوەی لە زانکۆش دەخوێندرێت، پێی دەوترێت: تەواوکاری ڕیمان (Riemann integration). جیا لە تەواوکاری ڕیمان، تەواوکاری تریش هەن، وەک: تەواوکاری لیبیگ (lebesgue integration).





بیردۆزی سەرەکی لە کالکیلەس

The fundamental theorem of calculus

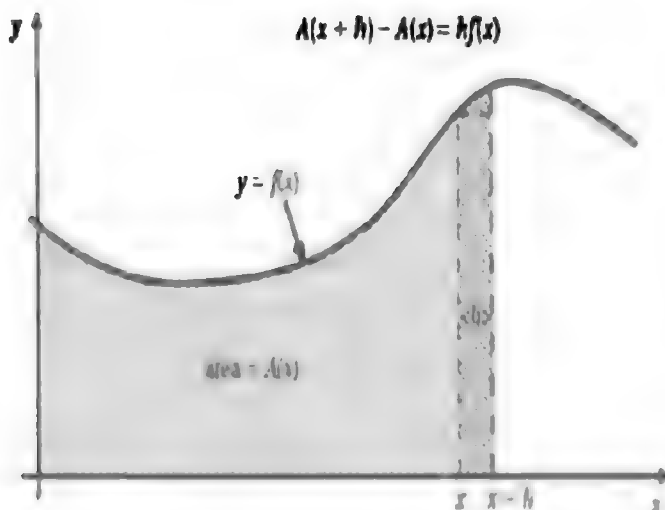
بیــــردۆزی ســــەرەکی کــــالیکلەس دەڵێـــت: تەواوکــــاری پـــێچەوانەی داتاشــــراوەیە. بیــــرۆکەکەش لەوە ســــەرچاوەی گرتـــووە کە تەواوکــــاری نەخشــەی$f(x)$ دەکرێــت وەک نەخشــەیەکی نــوێ ســەیر بکرێــت$F(x)$. لەم پەیوەندییەش دەبینین کە: $F(x) = \int^{x} f(u)du$.

لێــرە ئەو نەخشــە نــوێیە بە پیتــی کەپیــتەڵ هێمــا دەکرێــت، بە شــێوە بــــاوەکەی وا دەنووسرێــــــت: $F(x) = \int f(x)dx$. بــۆ ئەوەی خــــوێنەری ســەری لــێ نەشــێوێت. ئەم جــۆرە تەواوکــارییە پێــی دەوترێــت تەواوکــاری بــێ ســــنوور، کە ئەم تەواوکـــــارییە هـــــیچ پەیوەنـــــدییەکی بە ڕووبەر نیـــــیە، ئەو تەواوکــــارییەی کە پەیوەنــــدی بەڕووبەرەوە هەیە، تەواوکــــاری ســــنوردارە. گەر لەو دەستەواژەی سەروە وردبینەوە دەبنین کە:

$$\int f'(x) = f(x) + c$$

ڕەنــگە یەکێــک پرســێت ئەو C چیــیە زیادمــان کــردووە؟ لەبەر ئەوەی داتاشـراوەی ژمـارە-نەگـۆڕ دەکـاتە سـفر، بـۆیە ئـێمە ئەو نەگـۆڕە کە ناومـان لــێ نــاوە C زیــادی دەکەیــن، پێــی دەوتــرێن نەگــۆڕی تەواوکــارییەکە. هەر

بـــۆیە نەخشـــەی $F(x)$ پیشـــت بەو نەگـــۆڕە نـــا بەســـتێت، چـــونکە داتاشراوەکەی دەکاتە سفر.



ســـەلماندنی ئەنـــدازەییانە بـــۆ بیـــردۆزی ســـەرەکی کـــالکیلەس. ڕووبەری ئەو بەشـــە پەراوێـــزەی کە بە h پیشـــاندراوە، دەتـــوانین بخەملێنـــدرێت بەهـــۆی $h \times f(x)$ یـــان گەر هـــاتوو نەخشـــەکەمان بریتیـــی بێـــت لە $A(x)$، ئەوە ئەو ڕووبەر هەژماردەکرێت بەهۆی $A(x + h) - A(x)$.

تەواوكاری و سێگۆشەزانی

Integration and trigonometry

هەژمـــاركردنی تەواوكـــاری بـــۆ هەنـــدێك لە نەخشـــە ســـەرەكییەكان، پەیوەنـــدی بە نەخشـــە سێگۆشـــەییەكان هەیە. ئەمەش ئەوە دەخـــاتەڕوو كە نەخشـە سێگۆشـەییەكان چەنـدە گرنـگ و سـەنتەرن بـۆ بیركـاری. بەجۆرێـك ئەگەر هاتبـا نەخشـــە سێگۆشـــەییەكان لە ئەنـــدازەدا پێناســـە نەكرابـــان و باسـنەكرابان، ئەوە دەبـوو لە كـاڵكیلەس بیـر لە شـتێكی لەو شـێوە بكەیـنەوە، چـــونكە ئەوەتـــا تووشـــی كێشـــەیەك دەبـــین كە بەبـــێ بـــوونی نەخشـــە سێگۆشەییەكان وەڵامێكی ڕاستەخۆمان نەدەبوو. نمونە وەك:

$$\int \frac{1}{(1-x^2)} dx = tan^{-1}(x) + c$$

نمـــونەیەكی تـــر كە لە وێـــنەكە خـــراوەتە ڕوو، نەخشـــەی: $tan^{-1} x$ نەخشـــەی پـــێچەوانەیە بـــۆ نەخشـــەی tan، كە ناســـراوە بە: $arctan$. ئەگەر سـەرەنج بـدەین نەخشـەی پـێچەوانە جیـاوازە لەگەڵ ئەم شـێوازەی نووسـینە: $\frac{1}{tan(x)}$ واتە، ئەمە لەگەڵ: $tan^{-1} x$ جیاوازیـــان هەیە. شـــێوازی ئاســـایی نووســـینی ئەو جـــۆرە دەربڕینـــانە بەهـــۆی بەكارهێنـــانی ئەم پەیوەنـــدییە، كە: $\int f'(x)dx = f(x) + c$ ، كە ئەمەش ئەوە دەگەیەنێـــت كە داتاشـــــراوەی: $tan^{-1} x$ دەكـــاتە: $\frac{1}{1+x^2}$. بە هەمـــان شـــێوە نەخشـــەی پـــێچەوانەی ســـاین: $f(x) = sin\, x$ پێی دەڵێن: arcsin .



بیردۆزی تایلەر

Taylor's theorem

بیـــردۆزی تـــایلەر[76] یەکـــێکە لە بیـــردۆزە هەرە گرنگەکـــانی کـــالکیولەس، کە دەڵێـــت: ئەگەر بێـــت و نەخشـــەیەک ناکۆتـــا جـــار توانـــای داتاشـــراوەی هەبێت، ئەوە ئەو نەخشـــەیە دەتوانـدرێت لەســـەر شـــێوەی زنجیرەیەکـــی تـــوانی بنووسرێت. کە پێی دەوترێت زنجیرەی تایلەر.

زنجیـــرەی تـــایلەر، بـــۆ نەخشـــەیەک لە دەوروبەری خـــاڵی x_0 ، بـــریتییە لە کـــۆی چەنـــدین ڕادە کە $x - x_0$ دەگـــرنە خۆیـــان کە تـــوانیش-هێـــز وەردەگـــرن و توانەکـــانیش ژمـــارە سروشـــتییەکانن. ئەگەر بێـــت و نرخـــی x نزیک بێت لە سفر، ئەمە زنجیرەکەمان دەبێت:

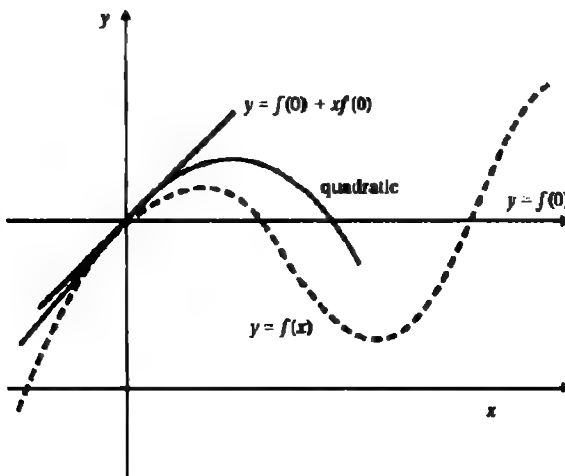
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^n(0) + \cdots$$

کاتێـــک $f^{(n)}$ بـــریتییە لە n جـــارەمین داتاشـــراوەی نەخشـــەی f و (!) بـــریتییە لە ئۆپەرەیتەرێـــک کە پێـــی دەوترێـــت لێکـــدراو (Factorial) . ئەوەی باســـمان کـــرد بـــارێکی شـــازە لە زنجیـــرەی تـــایلەر، کە پێـــی دەوترێـــت : زنجیرەی ماکلوریەن (Maclaurin serias).

---

[76] ناوی تایلەر لە ناوی بیرکاریزانی ئینگلیزی "تیم برۆک تایلەر" هاتووە.

ئەگەر بێت زنجیرەکە لێکنزیکبووە بێت بۆ هەموو نرخێکی X کە نزیک بێت لە x_0 ئەوە بەو نەخشەیە دەوترێت: نەخشەی شیکارەیی (Analytic)، کە نەخشەی شیکاریش زۆر گرنگە لە بابەتی شیکردنەوەی ژمارە ئاوێتەکان (complex number)، کاتێک تەواوکاری بۆ ئەو جۆرە نەخشانە دەدۆزینەوە.



لە ڕێگەی زنجیرەی تایلەر، هەنگاو بە هەنگاو بەرەو وێنە ڕاستەقینەی نەخشەکە دەڕۆین. لە یەکەم ڕادەی زنجیرەکە، وەک لە وێنەکە دا دیارە، هێڵێکی ڕاستە، پاشان ڕادەی یەکەم و دووەم بەیەکەوە، چەماوەی دووەم دروست دەبێت وەک لە وێنەکە، ڕادەی یەکەم،دووەم و سێیەم پێکەوە... بەم شێوە پەیتا پەیتا لە وێنەی ڕاستەقینەی نەخشەکە نزیک دەبینەوە.

تێ ئاخنین-چووڕاندن

Interpolation

ئەم بـــابەتە زیـــاتر لە هونەرێـــک دەچێـــت! کە بـــریتییە لە خەملانـــدنی دەرهاوێشـــتەی نەخشـــەیەک لە خـــاڵێکی دیـــارایکراو، کە ئەمەش بە پشـــت بەســـتن بە نـــرخە-بەهـــا زانراوەکـــانی تـــری نەخشـــەکە. واتە خەملانـــدنی نەخشـــەیەک بە هـــۆی چەنـــد خـــاڵێکی زانـــراوی نەخشـــەک (کە نـــازانین چیـــیە). کە ئەمەش گرنگییەکـــــی زۆری هەیە لە بـــــوارە پراکتیکییەکـــــان، کـــــاتێ بەکاردەهێنـــدرێت بـــۆ دروســـت کردنـــی پەیوەنـــدییەکی نەخشـــەیی بـــۆ چەنـــد نرخێکی بەرەڵا[77].

وا دانـــێ کە ئـــێمە کۆمەڵێـــک نرخـــی نەخشـــەیەک دەزانـــین، کە نەخشـــەکەمان بـــرتییە لە $f(x)$ و نـــازانین نەخشـــەکە چیـــیە! ئەو نرخـــانەی دەیـــــزانین بـــــریتین لە $n+1$ نـــــرخ، واتە x_i ، $i = 0،1،2،3،…،n$ کە لە بچـــوکترینەوە بـــۆ گەورتـــرین ڕیزکـــراوە . پرســـیارەکە ئەوەیە: لە نێـــوان ئەو نـــرخە زانـــراوانە چەنـــدین نرخـــی تـــر هەن، ئـــێمە چـــۆن دەتـــوانین دەســـتمان بگـــات بەو نرخـــانە؟ وێـــنەی خـــاڵی x بە شـــێوەیەکی گشـــتی چـــۆن بـــدۆزینەوە لە نێـــوان x_0 و x_n؟ ئەم کێشـــەیەش، بەهـــۆی ئەو کێشـــانەی لە ژیـــانی ڕۆژانە توشـــمان دەبێـــت ســـەری هەڵـــدا، بـــۆ نمـــونە دیـــاریکردنی ســـنورێکی نـــاوچەیەک.

[77] واتـــا نـــازانین ئەو نـــرخە لە چ نەخشـــەیەک بەدەســـت هـــاتووە، نرخێکـــی بـــێ ســـەرپەرشـــتیارە، ئـــێمە دێـــن ســـەرپەرشـــتیارێک-بەخێوکەرێـــک بـــۆ ئەو چەنـــد نـــرخە دەدۆزیـــنەوە کە مەبســـتمان نەخشەیەکە.

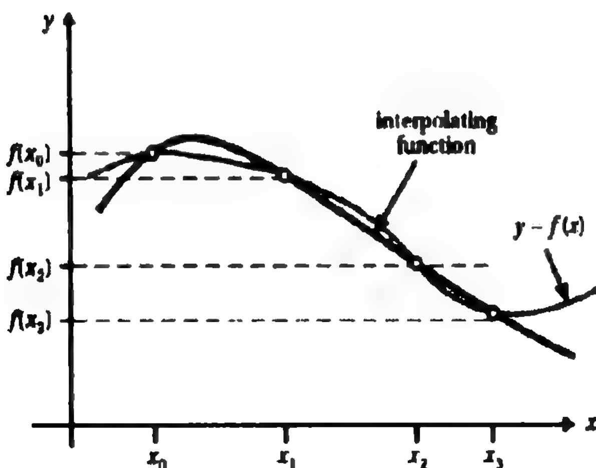
یەکێک لە ڕێگاکـان بـۆ وەڵامـی پرسـیارەکە ئەوەیە: دۆزینـەوەی ڕادەدرارێـک بە هـۆی بەکارهێنـانی ئەو زانیاریـانەی هەمـانە، واتە لەو داتـایەی هەمـانە، پـاش ئەوەی ئەو ڕادەدارە دەدۆزیـنەوە بەهـۆی ئەو داتـایە، ئەوە دەتـوانین نرخـی هەر خالێـک بـدۆزنەوەی کە لەنـاو داتـاکە بـوونی نیـیە، بەڵام بە شێوەیەکی نزیکەیی.

ئەو ڕادەدارەی دەیـدۆزینەوە، پـلەکەی پشـت بە ژمـارەی دراوەکـانی داتـاکە دەبەسـتێت، ئەگەر داتاکەمـان n+1 دراو بێـت، ئەوە ڕادەدارەکە پەلەکەی بریتـی دەبێـت لە n لەگەڵ n+1 کـۆلکە. بەم شـێوەش دەگەیـنە شـێوەیەک-نەخشـە بـۆ داتاکەمـان. لە سـەدەی هەژدەهەم بیرکـاریزانی فەرەنسـی **"لاگـرانج"** میتـۆدێکی زۆر نـاوازەی دۆزیـیەوە بـۆ ئەو بـابەتەی باسـمان کـرد[78]، واتە نەخشـەیەک بـۆ داتاکەمـان. میتـۆدەکەی لاگـرانج، پەیوەنـدییەکی هەیە لەگەڵ زنجیـرەی تـایلەر (لە بـابەتی پێشـوو باسـمان کـر) ، بەڵام هەنـدێک لە کەم و کـورِیش (Error) تێـدایە، چـونکە Interpolation زۆر ورد نییە، لەبەرئەوەی لەسەر داتا نەخشەیەک دەدۆزینەوە.

لە وێـنەکەی خـوارەوە ڕۆشـنە کە کەم و کـورییەکە (Error) چیـیە. ئەو نەخشـەی بەهـۆی پێدراوەکان دەیـدۆزینەو، پێـی دەڵـێن **نەخشـەی تـێ ئـاخنراو**. وەک لە وێـنەکە دەبینـین کە نەخشـە ڕەسـەنەکە بە بەراورد بە نەخشە تێ ئاخنراوەکە، جیاوازییەکی هەیە.

---

[78] لە قۆنـاغی سـێی زانکـۆ ئەو بـابەتەم لە وانەی 'Numerical analysis' خوێنـد، بە ڕاستی ئێستەش بیری ئەو وانەیە دەکەم.



لەم وێنە ڕوونکردنەوەییە، چوار قاڵ بە زەقی دیارە، کە هەردوو چەماوەکە لەو خاڵانە بە تەواوی بەیەکتر گەیشتوونە، ئەمەش واتای ئەوەیە، کە ئەو نەخشە تێ ئاخێنراوەی دەدۆزینەوە، دەبێت لەگەڵ بەهاکانی داتاکەمان تەواو یەکبگرێتەوە، بۆ نموونە ئەگەر لە داتاکەمان x=3 و لەبەرامبەری y=6، ئەوە ئەو نەخشەی دەیدۆزینەوە، دەبێت بۆ x=3 نرخی yمان بداتەوە کە دەکاتە 6. لێرە بیرۆکەیەک سەرئاو دەکەوێت، ئەویش: تا داتاکەمان نرخی زیاتری تێدا بێت، ئەوە ئەو نەخشە تێ ئاخێنراوەی دەیدۆزینەوە، وردتر و باشتر دەبێت وەک لەوەی داتاکەمان بچوک بێت، بەڵام تا داتاکەمان گەورەتر بێت، دۆزینەوەی نەخشەی تێ ئاخێنراو گرانتر دەبێت.

بەرزترین و نزمترین

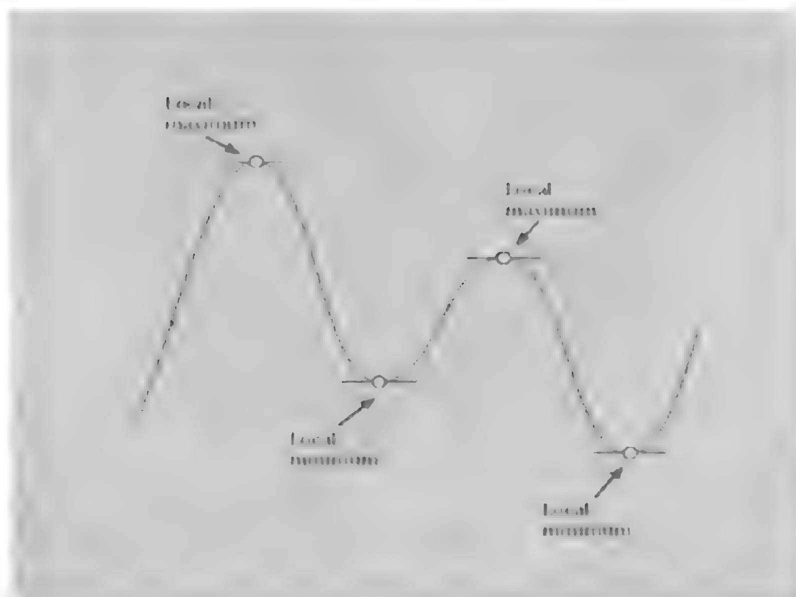
Maxima and minima

لە بابەتەکانی پێشوو، باسی نەخشە و وێنەی نەخشەمان کرد. ئەگەر بێت و سەیری وێنەی نەخشەیەک بکەین، ئەوە مومکینە بتوانین بەرزترین شوێنی وێنەکە و نزمترین شوێنی وێنەکە دیاری بکەین، واتە گەڕان بە دوای بەرزترین و نزمترین نرخ-بەهای نەخشەکە، بەم پرۆسەیە دەوترێت: optimization.

نەخشەی $f(x)$ لە خاڵی c گەورەترین نرخی هەیە ئەگەر بێت و $f(c) \geq f(x)$ بۆ هەموو نرخێکی x. بە هەمان شێوە نەخشەی$f(x)$ بچوکترین نرخی هەیە لە خاڵی d ئەگەر بێت و $f(d) \leq f(x)$ بۆ هەموو نرخێکی x. لاری نەخشەکە لە هەر یەک لەو خاڵانەی باسمان کرد، ئەوە لاری بریتیی دەبێت لە ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی، وەک لە وێنەکەش دا دیارە، بۆیە داتاشراوەکەی دەکاتە سفر. بۆیە ئەمەش دۆزینەوەی بەرزترین و نزمترین نەخشەکەمان بۆ ئاسان دەکات. لە خاڵی c کاتێک داتاشراوەکە لەم خاڵە سفرە، ئەوە گشت ڕادە هێڵییەکانی زنجیرەی تایلەر بوونیان نامێنێت، واتە:

$$f(x) \approx f'(c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + higher\ orde\ terms$$

ئەگەر $f''(c) \neq 0$ ئەوە واتـــای ئەوەیە شـــوێنەکە وەک بـــڕگەی هاوتـــا -چەمـــاوەی کـــراوە وایە، بەرزتـــرینە ئەگەر داتاشـــراوەی دووەم نەرێنـــی(-) بێـــت، نزمتـــرینە، ئەگەر بێـــت و ئەرێنـــی(+) بێـــت. یـــان ئەگەر $f''(c) = 0$ ، ئەوە موکینە خاڵی وێنەدانەوە بێت.

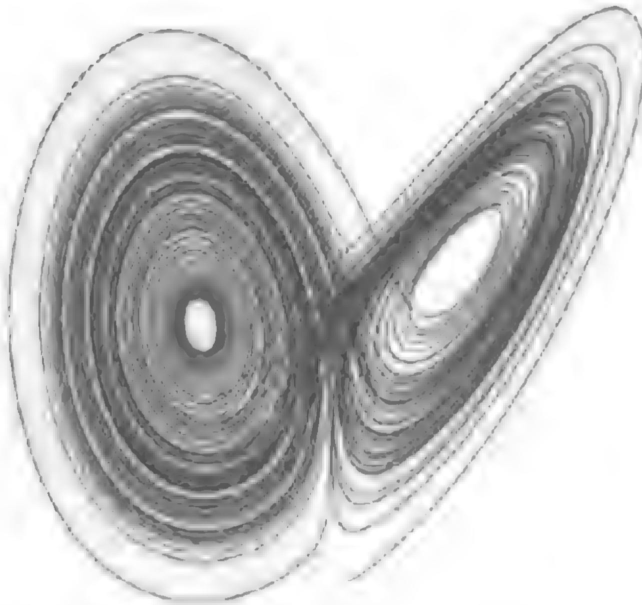


هاوکێشەی جیاکارانە

Differential equations

هاوکێشـــەی جیاکـــارانە، بـــریتییە لەو هاوکێشـــە بیرکـــارییەی کە تێـــدا نەخشـــەیەک و داتاشـــراوەی نەخشـــەکە لەخـــۆ دەگرێـــت، واتە پەیوەنـــدییەکە لە نێـــوان نەخشـــەیەک و داتاشـــراوی ئەو نەخشـــەیە. هاوکێشـــەی جیاکـــارانە، بەکـــاربەریی هەیە لە بـــواری ئـــابوری، زانســـتی کیمیـــا و زینـــدەزانی، هەروەهـــا فیزیـــاش کە تێـــدا کاتێـــک ڕێـــژەی گـــۆڕان لە برێـــک دەبەســـتێتەوە بـــۆ هەمـــان بـــڕکە خـــۆی. بۆنمـــونە ڕێـــژەی شـــیبوونەوەی مـــادەیەکی تیشـــکدەری کیمیـــایی هـــــاوڕێژە دەبێـــــت لەگەڵ ژمـــــارەی ئەتۆمەکـــــانی نمـــــونەکە، وەک لە هاوکێشـــــەیەک ، ئەویـــــش : $\frac{dN}{dt} = -aN$ کاتێـــک N بـــــریتییە لە ژمـــــارەی ئەتۆمەکـــان، وە a بـــریتییە لەو نەگـــۆڕەی کە پەیوەســـتە بە نیـــوەی تەمەنـــی نمـــــونەکە و، t بـــــریتییە لە کـــــات. ئەم هاوکێشـــــەیەش شـــــیکاری هەیە، کە شـــــیکارەکەی بـــــریتییە لە $N(t) = N(0)e^{-at}$ ، دیـــــارە کە ئەم دەربـــــڕینە یەکـــدەگرێتەوە لەگەڵ نەخشـــەیەک لە شـــێوەی e^x، کە ئەمەش پێمـــان دەڵێـــت کە شـــیبونەوەکە تـــوانییە. هاوکێشـــەی جیاکـــارانەی ئاســـایی (Ordinary)، بـــریتییە لەو هاوکێشـــەی کە تێـــدا تەنیـــا یەک گـــۆڕاوی ســـەربەخۆی تێـــدایە، وەک لەو هاوکێشـــەی ســـەرەوە کە "کـــات" گـــۆڕاوە ســـەربەخۆیەکەیە لە نمـــونەکە. بەڵام هاوکێشـــەکان زۆر جـــار مـــومکین نیـــنە بـــۆ ئەوەی بە وردی شـــیکارەکەی بـــدۆزرێتەوە، زۆرجـــار شـــیکارەکەی بە نزیکەیـــی دەبێـــت - میتـــــۆدیکی نومریکـــــاڵی دەبێـــــت. لەو نمـــــونەی ســـــەرەوە

$N(t) = N(0)e^{-at}$ تــوانەکە نەرێنیــیە، چــونکە شــیبوونەوەی مــادەیەکی تیشــکدەرە، واتە تیشــک بــڵاو دەکــاتەوە. نمــونەیەکی بیرکارییــانە لە هەمــبەر هاوکێشەی جیاکارانە وەک : $f(x) - f'(x) = 0$.



ئەو شــێوەی ســەرەوە، شــێکاری هاوکێشــەیەک دەنوێنێــت بە نــاوی: هاوکێشــەکانی لــۆرێنز (Lorenz equations)، کە چەماوەکــان خۆیــان دووبــارە نــاکەنەوە لەســـەر یەک ڕەوت، کە ئەمەش پێکهــاتەیەکی فراکتــاڵی-لەیەکبوویی هەیە.

زنجیرەی فوریێ

Fourier series

زنجیرەی فوریێ[79] بریتییە لەو نجیرەی کە تێدا نەخشەکە لە سەر شێوەی کۆی ناکۆتا رادە دەنووسرێت، کە رادەکانیش ساین و کۆساین دەگرنە خۆیان. لەبەر ئەوەی نەخشەکانی کۆساین و ساین نەخشەی خولین (Period) ، ئەوە واتە زنجیرەی فوریێ، بریتییە لە نەخشەیەکی دەوری یاخود زنجیرەیەکی خولی. ئەگەر بێت و نرخی x لە نێوان 0 و 2π بێت، ئەوە دەتوانرێن نەخشەیەکی وەک: $f(x)$ لە زنجیرەی فۆریەر بنووسرێت وەک:

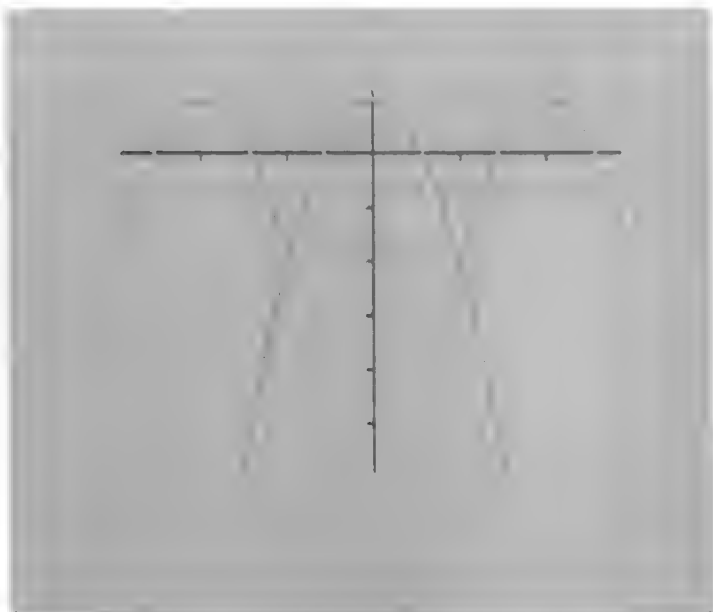
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

کاتێک کە :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$$

[79] ژان باپتیست ژۆزێف فوریێ (21ی ئازاری 1768 - 16ی ئایاری 1830) زانای بیرکاری و فیزیا. خەڵکی فەرانسا بوو. بە هۆی لێدوانەکانی لە سەر چۆنیەتی گواستنەوەی گەرمی ناسراوە. ئەم زنجیرەیە یەکێکە لە دەستکەوتە هەرە گرنگەکانی بواری زانست.

ئەگەر بێت و نەخشــە ڕەســەنەکەمان خــولی نەبێــت، ئەوە زنجیــرەکە نەخشەکە لە ماوەیەکی دیارکراو نیشاندەدات.



ئەو وێــنەیە نەخشــەی $f(x) = 1 - x^2$ دەنوێنێــت بەهــۆی زنجیــرەی فوریێ لە ماوەی $[-\pi ، \pi]$

نەخشەی پتر لە گۆڕاوێک

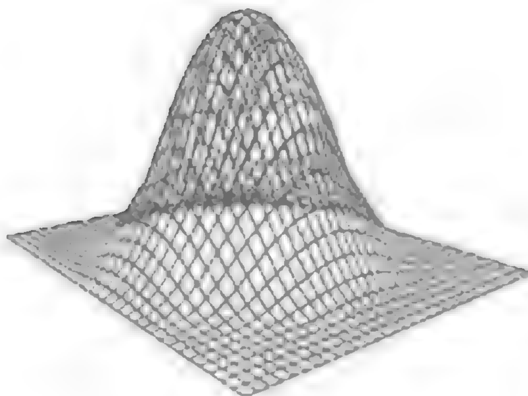
Functions of more than one variable

تـا ئێسـتا ئەو نەخشـانەی باسـمان کـردوون، یـان باسـکراون، گشـتیان نەخشـە بـوون لە یەگ گـۆڕاودا. بـۆیە نەخشـەمان هەیە لە گۆڕاوێـک زیـاتری تێـدایە. نەخشـەش لە گۆڕاوێـک زیـاتر، بـریتییە لە پەیوەنـدی نێـوان چەنـد گـۆڕاوێکی لێـک جیـاواز (سـەربەخۆ). بـا بە نمـوونەیەک ئەمە ئاسـان بکەیـنەوە: عەسـارەی شـەربەتەکەت لە بیـرە؟ لەو عەسـارەیە تەنیـا باسـی میوەکانمـان دەکـرد، واتە لەوێ گـۆڕاوەکە تەنیـا میـوە بـوو، بەڵام ئەوجـارە دێـن لەگەڵ میـوەکە شـتی تـری تـێکەڵ دەکەیـن، بـۆ نمـونە کە مـۆز میـوەیە، دێـن لەگەڵ مـۆزەکە شـیری تێـدەکەین! لێـرە مـۆز میـوەیە، وەک گۆڕاوێـک، وە شـیر خـواردنەوەیە، ئەوەش گـۆڕاوێکی تـر، کە ئێسـتا دوو گـۆڕاو لە ئـارادایە. نمـونەی نەخشـەی پتـر لە گـــــــۆڕاوێک وەک: $f(x,y) = x^2 + y^2$ کە ئەمە نەخشـەیەکە لە دوو گـۆڕاو، گۆڕاوەکـانیش بـریتین لە x و y. ئـێمە پێشـتر لە نەخشـەی یەک گـۆڕاو تەنیـا نرخمـان بە x دەدا، بەڵام لێـرە دەبێـت نـــرخ هەم بە x هەم بە y بـــدەین، واتە ئەگەر بێـــت $y = 3$و $x = 2$ ، پاشـــان لە نەخشـــەکەی دابنێـــنەوە، ئەوا: $f(2,3) = 2^2 + 3^2 = 13$. نەخشـەی لەو شـێوە ڕێگەمـان دەدات کە شـتەکان (Objects) پیشـانبدەین لە بۆشـایی سـێ ڕەهەنـدی یـان زیـاتریش. نەخشـەی زیـاتر لە گۆڕاوێـک، دەتوانـدرێت بە شـێوە گشـتییەکەی پێناسـەی بکەیـن کە: $f: R^2 \to R$ واتە بـواری نەخشـەکە بـریتییە لە تەوەرەی پۆتـانی دوو ڕەهەنـدی R^2 و مەودای

نەخشـەکە بـریتییە لە ژمـارە ڕاسـتییەکان واتـا R . نەخشـە لە یەک گـۆڕاو وێـنەکەی بریتـی بـوو لە چەمـاوەیەک (Curve)، بەڵام نەخشـە لە دوو گۆڕاو، وێنەکەی بریتییە لە ڕووەکان (Surfaces).

ئەو بیـرۆکەی سـەرەوە دەتوانـدرێت گشـتگیرتر بکرێـت بـۆ نەخشـە لە n گۆڕاوی ڕاستی، واتە $f: R^n \to R$ ، وەک:

$$f(x_1, \dots x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$



جیاکاری بەشی-هەندەکی

Partial differentiation

جیاکــاری بەشــی، بــریتییە لە گشــتاندنێک بــۆ جیاکــاریکردنی نەخشــە، ئەگەر بێــت و ئەو نەخشــەیە لەچەنــد گۆڕاوێــک بێــت. وەک: نەخشــە لە یەک گــۆڕاو، ئەوە جیاکــاری هەر لەســەر ئەو گــۆڕاوە دەکرێــت خــۆ شــتێکی ترمــان نیــیە. وا دانێــی ئێســتا نەخشــەیەکمان هەیە لە دوو گــۆڕاو پێکهــاتووە، ئەوانــیش: x و y. واتە $f(x,y) = z$. ئێســتا ئەگەر بێــت و باســی جیاکــاری بکەیــن، بمــانەوێ داتاشــراوە بــۆ ئەو نەخشــەیە بــدۆزینەوە، ئەوە یەکســەر دەبێــت پرســیار بکەیــن: داتاشــراوە بە پێــی کــام گــۆڕاو؟ بە پێــی گــۆڕاوی x یــان بە پێی گۆڕاوی y ؟ باشــە ئەگەر داتاشــراوە بەپێی گۆڕاوی x بێت ئەوە yچیــی بەســەر دێــت؟ ئەگەر داتاشــراوە بە پێــی x بێــت، ئەوەی ئەوکــات y وەک ژمــارە ســەیر دەکرێــت، واتە لەو کــاتە داتاشــراوەی y دەکــاتە ســفر. وە بە پــێچەوانەوە، ئەگەر داتاشــراوەکە بە پێــیy بێــت، ئەوە x وەک ژمــارە-نەگــۆڕ ســەریر دەکرێــت و داتاشــراوەکەی دەکــاتە ســفر. داتاشــراوەی بەشــی، بەو شــێوە هێمــا دەکرێــت بە پێــی گــۆڕاوی x : $\frac{\sigma f}{\sigma x}$ واتە داتاشــراوەی نەخشــەی f بە پێــی گــۆڕاوی x ، بــۆ داتاشــراوە بە پێــی گــۆڕاوی y: $\frac{\sigma f}{\sigma y}$.

نمــونە ئەگــــەر: $f(x,y) = x^2 + y^2$ ، ئەوە داتاشــراوە بە پێــی x واتە $\frac{\sigma f}{\sigma x}$ بــدۆزینەوە، ئەوە دەکــاتە: $\frac{\sigma f}{\sigma x} = 2x$ و داتاشــراوە بە پێــی y دەکــاتە: $\frac{\sigma f}{\sigma y} = 2y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

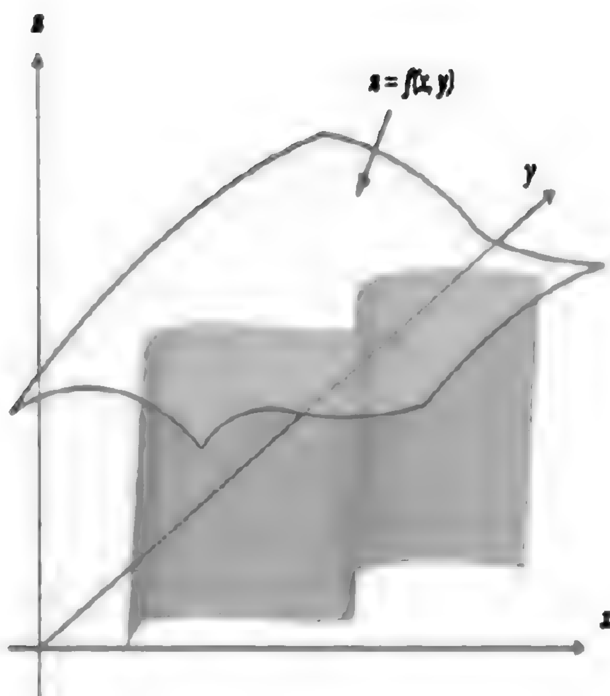
تەواوکاری لەسەر چەماوەیەک

Integration on a curve

دۆزینەوەی تەواوکاری لەسەر چەماوەیەک، هەر هەمان شێوەی تەواوکارییە بۆ نەخشەیەک لە یەکێک لە گۆڕاوەکانی، کاتێک ئەو نەخشەیە زیاتر لە گۆڕاوێکی هەیە. لە بۆشایی دوو ڕەهەندیدا ، نەخشەی $f(x,y) = z$ وێنەکەی بریتییە لە ڕووێک. وادانێ هەر هەمان نەخشە ئەگەر بێت و $z = 0$ ئەوە ئەوکاتە ڕووەکە وەک داپۆشەرێک دەردەکەوێت کە پەیوەندی بە نەخشەی $f(x,y) = z$ هەیە. ئەو شێوەش ئاراستەی هەیە؛ کە ئەرێنییە یان نەرێنییە، بۆیە بە تەواوکاری ئەو شێوەیە زۆر جار دەوترێت: تەواوکاری هێڵی (Line integral).

ئەگەر بێت و ئەو نەخشەیەی کە لە دوو گۆڕاو پێکهاتووە، y بە ژمارەیەک دابنێین، ئەوە ئەوکات نەخشەکە دەبێتە نەخشەیەک تەنیا لە گۆڕاوی x، وە بە پێچەوانەوەش، ئەگەر بێت و x بە ژمارەیەک دابنێین، ئەوە ئەوکات نەخشەکەمان دەبێتە نەخشەیەک لە گۆڕاوی y، بۆیە ئەوکاتەش هەژمارکردنی تەواوکارییەکە ئاسان دەبێت کە بە پێی ئەو تەکنیکانە شیکار دەکرێت کە فێری بووینە.

لەگەڵ ئەمەش، بیرۆکەی تەواوکاری بە خێرایی تەشەنەدەکات و فراوان دەبێت. لەم وێنەی خوارەوە دیارە کە مەبەستمان چییە لە شێوەیەکی داپۆشەر کاتێک $Z = 0$.


z
z = f(x, y)
y
x

تەواوکاری لەسەر ڕووێک

Integration on a surface

هەمـــــوو ئەو تەواوکاریـــــانەی ئـــێمە لە قوتابخـــــانە دەیـــــانخوێنین، ســـەرجەمیان هەژمـــارکردنی ڕووبەرە، واتە تەنیـــا پشـــت بەســـتن بـــوو بە گـــۆڕاوی x بەڵام ئەگەر بێـت و ڕووێکمـــان هەبێـت، نەوەک ژێـــر چەمـــاوەک، ئەوە جەتـمەن ڕووەکـان پشـت بە هەردوو گـۆڕاوی x و y دەبەسـتن، واتە لە ڕەهەنـــدی بەرزتـــر، بـــۆیە کاتێـــک دێـــن تەواوکـــاری بـــۆ ئەو ڕووە دەدۆزیـــنەوە، ئەوەی دەســـتمان دەکەوێـــت بریتییـــی نیـــیە لە ڕووبەر، بەڵکـــو بریتییە لە قەبارە (volume).

وا دانـــێ ناوچەیەکمـــان هەیە بە نـــاوی A لە تەوەری پۆتـــــــانی -xy و نەخشـــــەیەکمان هـــــــــەیە $z = f(x,y)$. بەهەمـــــان شـــێوە چـــۆن لە دۆزیـــنەوە ڕووبەری ژێـــر چەمـــاوەک هـــاتین لاکێشـــەی بچـــوک بچوکمـــان دروســـــت کـــــرد، پاشــــان ڕووبەری هەریەکەمـــــان دۆزیـــــیەوە، گشــــتیمان کـــۆکردنەوە بـــۆ ئەوەی ڕووبەری ژێـــر چەمـــاوەکە بـــدۆزینەوە، ئەوە دووبـــارە لە دۆزیـــنەوەی قەبـــارە، هەمـــان شـــت ئەنجـــام دەدەیـــنەوە، بەڵام لێـــرە ئەوەیە کە دەبێـــت ڕووەکە پـــارچە پـــارچە دەکەیـــن، دواتـــر بەرزی و درێـــژییەکەی دەپیـــوین، پاشـــان قەبـــارەی هەر یەک لەو پـــارچە بچوکـــانە دەپیـــوین، دواتـــر گشـــتیان کـــۆ دەکەیـــنەوە و قەبـــارەی ڕووەکەمـــان دەســـت دەکەوێـــت. بـــۆیە لەمەوە هەژمـــارکردنی تەواوکـــاری دووانـــی دێـــتە گـــۆڕێ، تەواوکـــارییەک بـــۆ

گۆڕاوی x و تەواکارییەک بۆ گۆڕاوی y کاتێک z نەخشەیەکە لە x و y ، کە مەبەستیش لە A بریتییە لە ڕووەکە.

$$\iint_A f(x,y)dx\,dy$$

ئەم تەواوکارییەی سەرەوە بۆ نەخشەی f لەسەر A پێی دوترێت: تەواوکاری دووهێند یان دەبڵ تەواوکاری. دەشکرێت تەواوکاری بۆ نەخشەی فرە گۆڕاویش پێناسەبکەین.

نمونەیەکی سادە دێنینەوە بۆ ئەوەی بیرۆکەکە ڕونتر بێت. وادانێ تەرازوەکی زۆر هەستیار و بچوکمان هەیە، کە توانای پێوانی شتی زۆر بچوکی هەیە بەقەد دشلەمەی چا (قەند)، ئێمە سێویکمان هەیە، چۆن دەتوانین ئەو سێوە بکێشین بەو تەرازووە بچوکە کە لە ڕاستیدا توانای کێشانی سێوی نییە؟ بیرۆکەکە ئەوەیە سێوەکە هەمووی پارچە پارچە دەکەین- پارچەی بچوک بچوک، دێن کێشی گشت پارچەکان دانە بە دانە دەپێوین، پاشان کێشی گشت پارچەکان کۆدەکەینەوە لە کۆتایی کێشی سێوەکەمان دەست دەکەوێت.



تەواوکاری دووانی لەسەر ئەو ڕووەی تەنیشت، کە ڕووەکی لاکێشەی سێ ڕەهەندی دەنوێنێت، ئەوەی دەستمان دەکەوێت، قەبارەی ئەو تەنەیە.

بیردۆزی گرین

Green's theorem

بیـــردۆزی گـــرین[80] یەکـــێکە لە بیـــردۆزە گرنگەکـــان لە جیاکـــاری و تەواکـاری پێشـکەتوو. ئەم بیـردۆزە پەیوەنـدییەکە لە نێـوان تەواوکـاری هێـڵ و تەواوکـــاری دووانـــی. واتە ئـــێمە چەمـــاوەیەکی داخراومـــان هەیە، وە ڕووبەرێـک هەیە دەکەوێـتە نـاو ئەو چەمـاوە داخـراوە، چەماوەکەمـان نـاو لـێ نـاوە Y و ڕووبەرەکەمـان نـاو لـێ نـاوەی A لەو وێـنەی بەرامـبەر چاماوەکە دیـارە کە چـۆنە، بـۆیە دۆزیـنەوەی تەواوکـاری هێڵـی بـۆ ئەو چەمـاوەیە کـارێکی وەهـا ئاسـان نیـیە، بـۆیە بیـردۆزی گـرین کۆمەکمـان دەکـات لە دۆزیـنەوەی تەواوکـاری هێڵـی بـۆ ئەو چەمـاوەیە، بـۆیە لەبەر ئەوەی ئەو چەمـاوەیە ڕووبەرێکـی لەنـاو دایە، بیـردۆزی گـرین دێـت لەڕێـگەی ئەو ڕووبەرەوە کە کەوتـۆتە نـاو چەمـاوەکە، تەواوکـاری هێڵـی چەماوەکەمـان بۆ دەدۆزێتەوە. بەو پەیوەندییەی خوارەوە:

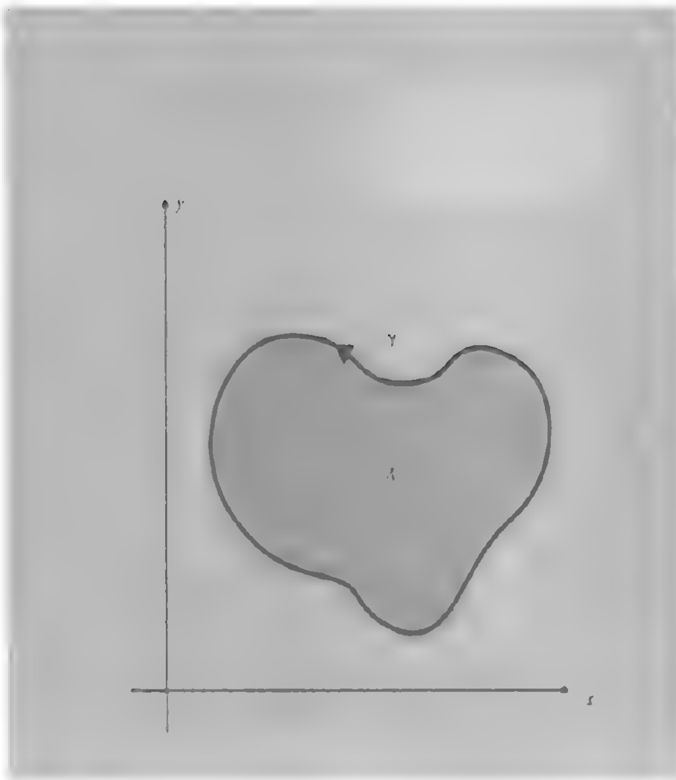
$$\int_{Y} f\,ds = \iint_{A} \left(\frac{\sigma f}{\sigma x} - \frac{\sigma f}{\sigma y}\right) dx\,dy$$

کە ds ئامـاژەیە بـۆ ئەو گـۆڕانە بچـوکە تـاک ڕەهەنـدەی کە ڕوودەدات بە درێژایـی ڕێچـکەی Y. هاوکێشـەی لەم شـێوە پەیوەنـدییە پەتیـیەکەی

[80] جـۆرج گـرین، بیرکـاریزان و فیزیکزانێکـی بەریتـانییە لە 1793 لە دایـک بـووە، کە لە 1841 کۆچی دوایی کردووە.

نێـــوان تەواوکـــاری و جیاکـــاری هەنـــدەکی دەگشـــتێنێت، کە ئەمەش دەستکەوتێکی گرنگە بۆ جیاکاری و تەواوکاری.

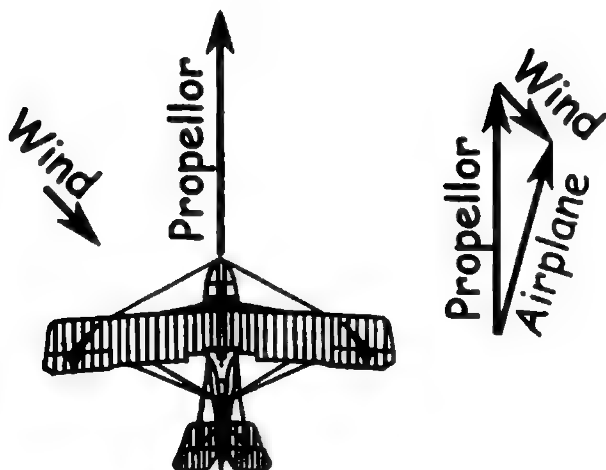
شـتێکی تـر لەم پرۆسـە کە گـرنگە، ئەوەیە کە ئاراسـتەی چەمـاوەکە بە پـێچەوانەی میلـی کـاتژمێر بێـت. کەواتە خـاڵە سـەرنج ڕاکێشـەکە ئەمەیە: پەیوەنـدی نێـوان "ڕووەک و چەمـاوەیەک" یەکـدەخرێت بەهـۆی تەواوکارییەوە لە نێوان دوو ڕەهەندی جیاواز n و n-1 .



بەشی حەوتەم

پوختەی ئاراستەبڕەکان

Introducing vectors

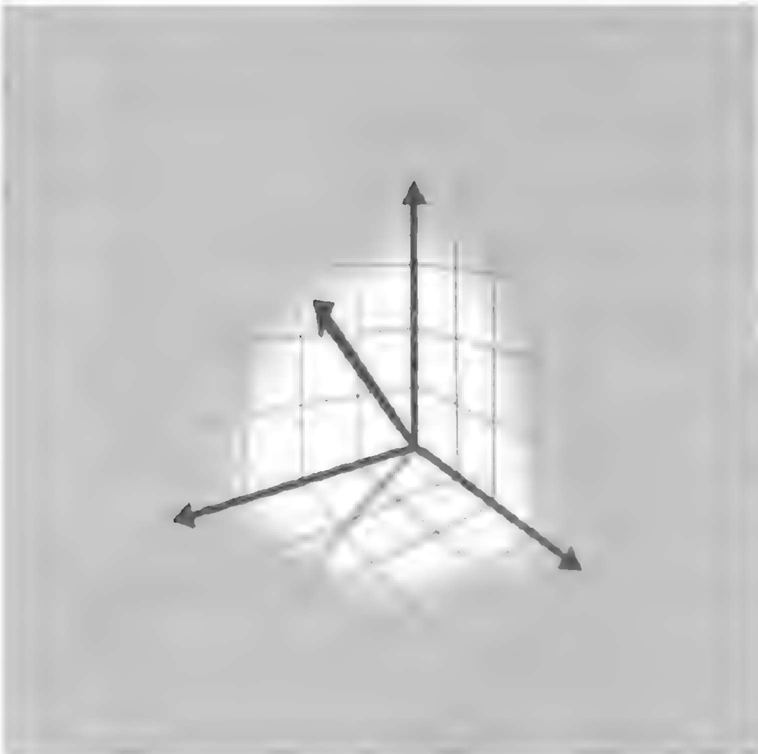


ئاراستەبڕەکان

Vectors

ئاراستەبڕەکان بەکاردەهێندرێت بۆ پیشاندان-نواندنی بڕێکی بیرکاریانە یاخود فیزیکیانە، کە بڕ-خێرایی، درێژ و ئاراستەی هەیە، وەک: با، کە خێرایی و ئاراستەی هەیە، وەک چۆن زۆر جار لەسەر نەخشە ئاماژەیەک بەکاردەهێندرێت بۆ پیشاندانی ئاراستەی با، کە چۆنە و بۆ کوێ دەچێت و، بە چ خێرایەک. ئاراستەبڕەکان بە شێوەی تیر (Ray) پیشاندەدرێت. سەری تیرەکە، خاڵی کۆتایی ئاراستەبڕەکە دەنوێنێت، درێژی تیرەکەش، ئەندازەی ئاراستەبڕەکەیە. بەلایەنی کەم خاڵی هاوبەشی نێوان بیرکاری و فیزیا، لە ئاراستەبڕەکانە. ئاراستەبڕەکان بەکارهێنانیان زۆرە، لە دروستکردنی یارییەکان، یان لە دروستکردنی ڕێگاوبانەکان و ئەوانەی پێشبڕکێی ئەنجامدەدەن بە بەلەمەکانیان لە ڕووبارەکان...، یان ئەگەر بێت و یەکێک چاوەڕێی تۆ بێت لە شوێنێک، تۆش کیلۆمەترێک لەو دوور بێت، ئەوە ئەو زانیارییە بەس نییە کە پێی بڵێی: وەرە لام من کیلۆمەترێک لەتۆوە دوورم! لێرە پێوستە زانیارییەکی تریشی پێ بدەی، ئەوش بە چ ئاراستەیەک ئەم کیلۆمەترە ببڕێت. ئاراستەبڕەکان ڕۆڵی سەرەکی دەگێڕن لە ئەندازەدا، ئەندازە بەبێ ئاراستەبڕەکان زۆر ئاڵۆز و گران دەبوو، چونکە زۆرێک لە پرسە ئەندازییەکان هەر لە ڕێگەی ئاراستەبڕەکانەوە چارەسەریان بۆ دەدۆزرێتەوە، کە بوونی چەند ڕێگایەکی جیاواز بۆ گەیشتن بەو کێشەیە،

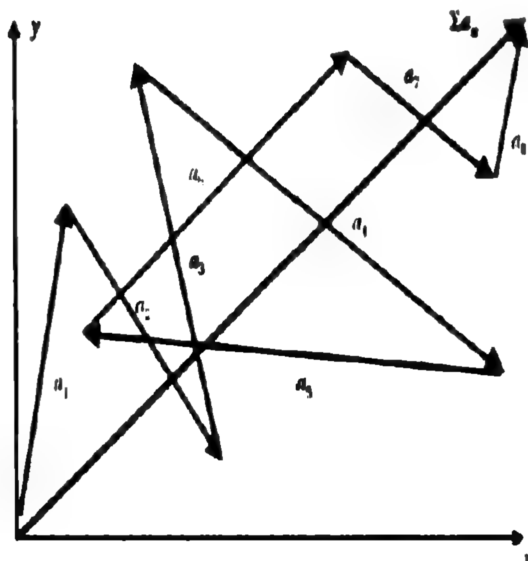
ئەوە تێگەیشــتنی زیاترمــان پــێ دەدات لە هەمــبەر پرســەکە. بە کــۆمەڵەی ئاراســتەبڕەکانیش دەوتــرێن ئــاموتەی ئاراســتەبڕەکان (Vector space). کە تێــدا سەردەکێشــنە زۆر لــق و بــواری بیرکــاری، کە پانتــاییەکی زۆر لە زاســتتەکانی تــر داگیــر دەکەن و ســود بەخشــن. دوایــی دێــن، لە ڕێــگەی تەوەرەی پۆتانەوە باس لە ئاراستەبڕەکان دەکەین.



کۆکردنەوە و لێ دەرکردنی ئاراستەبڕەکان

Adding and subtracting vectors

دوو ئاراستەبڕ، کۆدەکرێنەوە بە شێوەیەک کە، کۆتایی ئاراستەبڕی یەکەم بنوسێت بە سەرەتای ئاراستەی بڕی دووەم، پاشان دروستکردنی ئاراستەبڕێکی نوێ لە خاڵی دەستپێکی ئاراستەبڕی یەکەم بۆ خاڵی کۆتایی ئاراستەبڕی دووەم، هەر وەک لە وێنەکە دا دیارە. ئەو ئاراستەبڕە نوێیەی لەوەوە دەستمان دەکەوێت، پێی دەوترێت: ئاراستەبڕی بەرئەنجام (Resultant vector). ئاراستەبڕەکان دەتوانرێت لەتەوەرەی پۆتان نیشانبدرێت و کردارەکانیان لەسەر جێ بەجێ بکرێت، واتە بۆ هەر جووتە ڕێکخراوێک (x,y) لە دووری خاڵی بنەڕەتەوە یان هەر خاڵێکی تر، ئاراستەبڕ دروست بکەین. بۆ دۆزینەوەی کۆی دوو ئاراستەبڕ، وا دانێ دوو ئاراستەبڕمان هەیە، ئەوانیش $(0,1)$ و $(1,0)$، پاشان دەتوانین ئەو دوو ئاراستەبڕە بەو شێوە: $(1,0) = (1+0 , 0+1)$ کۆبکرێتەوە. بۆ لێدەرکردنی دوو ئاراستەبڕ هەر هەمان شێواز. ئەگەر هەر هەمان ئاراستەبڕانە لە یەکتر دەربکەین: $(1,-1) = (1-0, 0-1)$. لەبەر ئەوەی هەر یەک لە y و x لایەکانی سێگۆشەی گۆشە وەستاو دەنوێنن، ئەوە بەهۆی بیردۆزی فیساگۆرس دەتوانین بڕەکەیان یا مەودایەکەیان (Modulus) بدۆزینەوە، بۆ نمونە مەودای ئاراستەبڕی $(1,1)$ دەکاتە: $\sqrt{(1^2)+(1^2)} = \sqrt{2}$.



هەمـــــوو ئەو ڕێچکـــــانەی کە لە وێـــــنەکەدا هەیە، دەتوانـــــدرێت ســـادەبکرێتەوە بەهـــۆی کـــۆکردنەوەی گشـــت ئەو ئاراســـتەبڕانە بـــۆ یەک ئاراســـتەبڕ، بـــۆ کـــۆکردنەوەی گشـــت ئەمـــانەش هێمـــای ســـیگما ($\sum$) بەکاردێنین، کە هێمایەکی گریکییە.

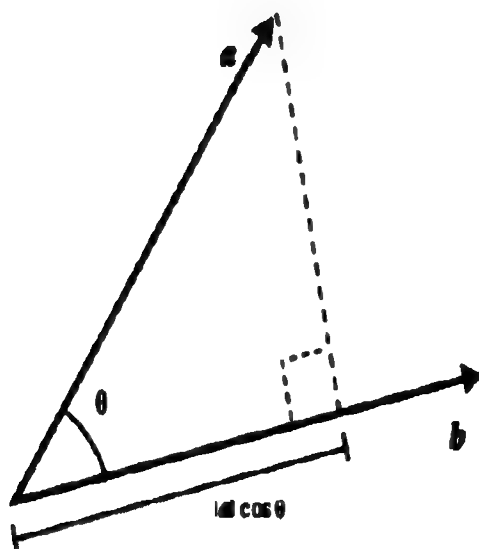
به برلێکدان

Scalar product

لەسەر ئاراستەبرەکان، چەندین کردارمان هەنە، یەکێکی تر لە کردارکان بریتییە لە: به برلێکدانی ئاراستەبرەکان. کە بەکاردێت بۆ دروستکردنی ئاراستە برێکی نوێ. بەلام ئەوەی لێرە جیاوازە، ئەوەیە کە ئەو ئاراستەبرەی بە برلێکدان دەستمان دەکەوێت، هەلگری ئاراستەی هیچ یەک لە ئەو ئاراستەبرانە نییە کە ئەو ئاراستەبرە نوێیان دروست کردووە، لە یەک بار ئەم شتە رووددەدات، ئەگەر بێت و هەردوو ئاراستەبرەکە یەکسان بن، ئەوە بەبرلێکدانیشیان هەر یەکسان دەبێت، بەلام ئەمە بارێکی جێگای سەرنج نییە بۆیە باسی ناکەین. وا دانێ دوو ئاراستەبرمان هەیە، ئەوانیش: $(1,3)$ و$(1,2)$ به برلێکدانی ئەم دوانە دەکاتە:

$7 = (2 \times 3) + (1 \times 1)$. ئەگەر بێت و دوو ئاراستەبرەکە لەسەر یەک ئەستوون بن، ئەوە کۆساینی گۆشەی نێوان ئەو دوو ئاراستەبرە دەکاتە سفر، هەر بۆیە بە برلێکدانی دوو ئاراستەبری لەسەر یەک ئەستون دەکاتە سفر. بابەتی بە برلێکدانی لە بواری فیزیا گرنگییەکی زۆری هەیە، وەک لێشاوی موگناتیس، لە رێگەی بە برلکیدانی ئاراستەبراکانی، لێکدانەوی بۆ دەکرێت و تێیان دەگەین. ئەگەر بێت و یەکێک لە ئاراستەبرەکان یەکی (unit vector) بێت و مەوداکەی (Modulus) بکاتە یەک (1)، ئەوە راستەوخۆ بە برلێکدانی ئاراستەبرێکی

تـــر بەم ئاراســـتەبڕە، بەرئەنجـــامەکەی دەکـــاتەوە پێکهـــاتەی ئاراســـتەبڕەکەی تر، وەک: بە برلێکدانی $(0،1)$ و $(2،3)$ کە دەکاتەوە 3 .



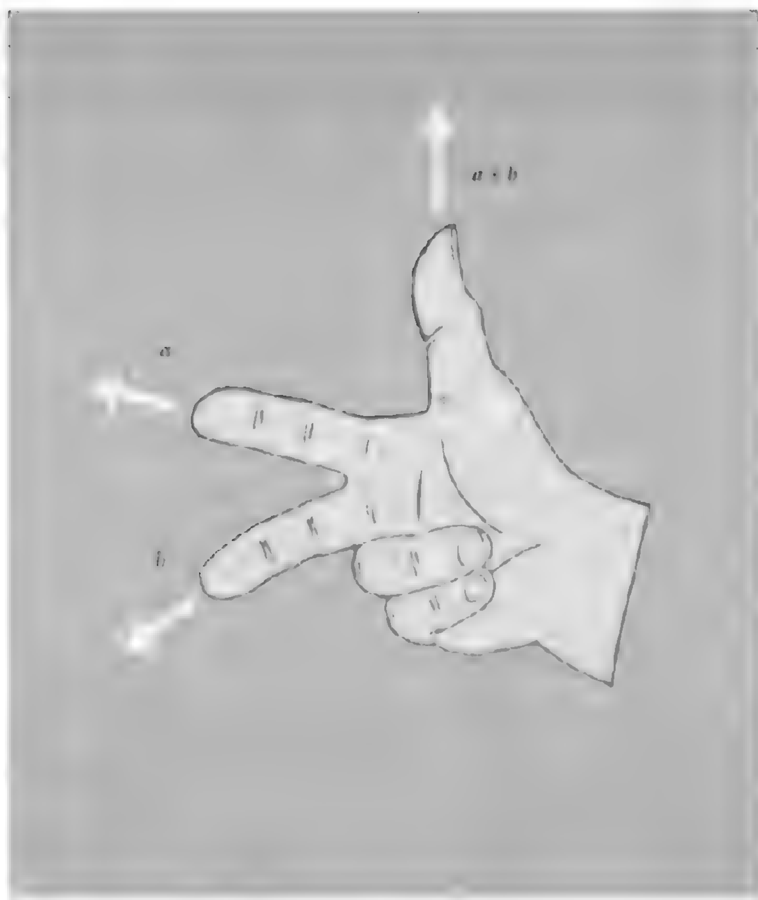
لەم وێـــنەی ســـەرەوە، $|a|\cos\theta$ بـــریتییە لە دەرهـــاوێژی a بەرەو ئاراســـتەی b، بـــۆیە بە برلێکـــدانی ئەم دووانە: $|a||b|\cos\theta$ دەکـــاتە بە برلێکدانی مەودای ئاراستەبڕی b و دەرهاوێژی a بەرەو b.

لێکدانی ئاراستەبڕەکان

Cross product

لێکدانی ئاراستەبڕەکان، یەکێکی تره لە کردارەکان لەسەر ئاراستەبڕەکان. لێکدانی ئاراستەبڕەکان بەو شێوە ئاماژەی پێ دەکرێت: $a \times b$، کە ڕێگایەکە بۆ لێکدانی دوو ئاراستەبڕ لە بۆشاییەکی سێ ڕەهەندی، کە ئەو ئەنجامەی یاخود ئەو ئاراستەبڕەی لەو لێکدانە دەستمان دەکەوێت، ئەستوون دەبێت لەسەر هەردوو ئەو ئاراستەبڕانەی کە لێکمان دوان. لە فیزیا، لێکدانی ئاراستەبڕەکان گرنگە بۆ تێگەیشتن لە پەیوەندی نێوان هێز و درێژی، واتە ئەو درێژییەی دەکەوێتە نێوان شوێنی خولانەوە و ئەو شوێنەی هێزەکەی دەخرێتە سەری، وەک دەرگا، شوێنی هێزکە بریتییە لە کیلۆن-یەدە، واتە دەسکی دەرگاکە، شوێنی خولانەوەی دەرگاکە کە بریتییە لە ئەرمادەکە-شێونی خولانەوەکە ، دیارە هەتا هێزەکە لە خاڵی خولانەوەکە دوورتر بێت، ئەوە جولاندنی دەرگاکە بۆ ژوورەوە یان بۆ دەرەوە ئاسانتر دەبێت. بۆ گوزارشتکردن لەو بەرئەنجامە نوێیەی لە لێکدانی ئاراستەبڕ دەستمان کەوتووە، شتێکمان هەیە وەک یاسایەک بۆ وەسفکردنی ئەو لێکدانە، ئەویش پێی دەوترێت "یاسای دەستی ڕاست"، کە لە وێنەکە پیشادراوە. پەنجەی یەکەم ئاماژەیە بۆ ئاراستەبڕی a ، پەنجەی دووەم ئاماژەیە بۆ ئاراستەبڕی b، لێکدانی ئەو دوو ئاراستەبڕەش بە پەنجە گەورەکە دەنوێندرێت. سوودی ئەم یاسایەش بۆ ئەوەیە ئاراستەی هەر یەک لە مانە $b \times a$ و $a \times b$ بزانین،

بـــۆیە لەم پرۆســـەی لێکـــدانی ئاراســـتەبڕەکان تایبەتمەنـــدی ئـــالوگۆڕی لەبەرچـــاو دەگیرێـــت، واتە ئەم لێکـــدانە، وەک لێکـــدانی ئاســـایی، ســـیفەتی ئالوگۆڕی نییە.

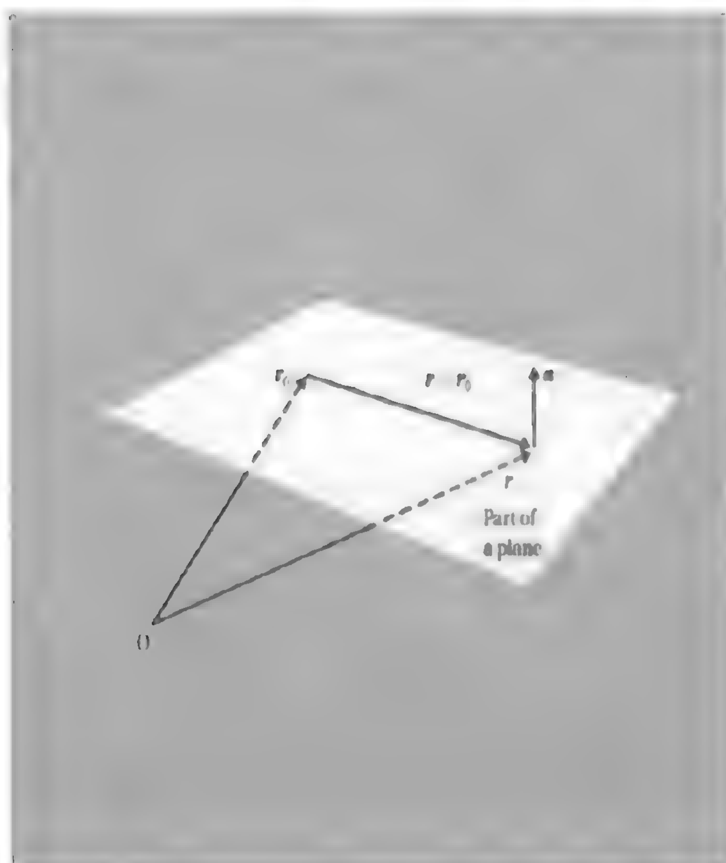


ئەندازەی ئاراستەبڕ

Vector geometry

ئەنـــدازەی ئاراســـتەبڕەکان، وەســـفی بەکارهێنـــانی ئاراســـتەبڕەکان دەکـــات لە میـــانەی چارەســـەرکردنی کێشـــە ئەنـــدازەییەکان. بەشـــێکی زۆری بیرۆکەکـــانی ئەنـــدازە ئاســـانکراوەتەوە لە ڕێـــگەی ئاراســـتەبڕەکانەوە، بەتـــایبەت کاتێـــک ئـــیش لەگەڵ ئـــاهووتە ســـێ ڕەهەنـــدی یـــاخود فـــرە ڕەهەنـــدەکان دەکەیـــن. ئەگەر بێـــت و شـــوێنی خاڵێـــک لە ئـــاهووتەی ســـێ ڕەهەنـــدی بە شـــێوەی ئاراســـتەبڕ نیشـــاندرا $r = (x,y,z)$ کە پێـــی دەوترێـــت پـــێگەی ئاراســـتەبڕەکە، لە پاشـــان بۆشـــایی دوو ڕەهەنـــدی تەوەرەی پۆتـــان لە خاڵێـــک، لەگەڵ شـــوێنی- پـــێگەی ئاراســـتەبڕێکی ئەرێنـــی r_0 ، فەراهەمـــدێنێت بەهـــۆی شـــێکاری $a.(r - r_o) = 0$ ، کاتێـــک aبـــرتییە لە ئاراســـتە برێـــک کە ئەســـتونە لەگەڵ ڕووتەخـــت، وەک لە وێـــنەکە ڕوونکـــراوەتەوە. ئەگەر بێـــت و ئـــێمە ســـێ هاوکێشـــە بـــۆ تەورەکـــان بنووســـین بە بەکارهێنـــانی ئەو فۆرمـــولەی ســـــەرەوە، ئەوە مەرجـــی یەکتربرینـــی هەرســـێ هاوکێشـــەکە بـــریتییە لە هەبـــوونی ســـێ هاوکێشـــەی هاوتـــا. ئامـــانجی ئەوکـــارەش ئەوەیە کە ئاســـانتر دەردەکەوێـــت بـــۆ ئەنـــدازە، واتە تێگەیشـــتن لە ڕێـــگەی ئەنـــدازەوە ئاســـانترە، بەڵام شـــیکار و کـــارکردن لەم ڕێـــگەیە ڕۆشـــنترە، چـــونکە لەم بـــارەدا، ئەم ســـێ هاوکێشـــەیە: شـــیکارێکی بـــێ هاوتـــای-تاقـــانە دەبێـــت، یـــان هـــیچ شـــیکارێکی نابێـــت، وە یـــاخود ناکۆتـــا شـــیکاری دەبێـــت. بەڵام لەم دۆخە یـــا شـــیکارێکی بـــێ هاوتـــای دەبێـــت، یـــانیش هـــیچ شـــیکارێکی نابێـــت. ئەگەر بێـــت و هەرســـێ

ڕووتەخــتەکە وەک یەک بــن، ئەوە ئاکۆتــا شــیکاری دەبێــت، یــان هــیچ شــیکارێکی نابێــت ئەگەر بێــت و بەلایەنــی کەم دوو لەو ڕووتەختــانە هاوتەریب و یەکسان نەبن.

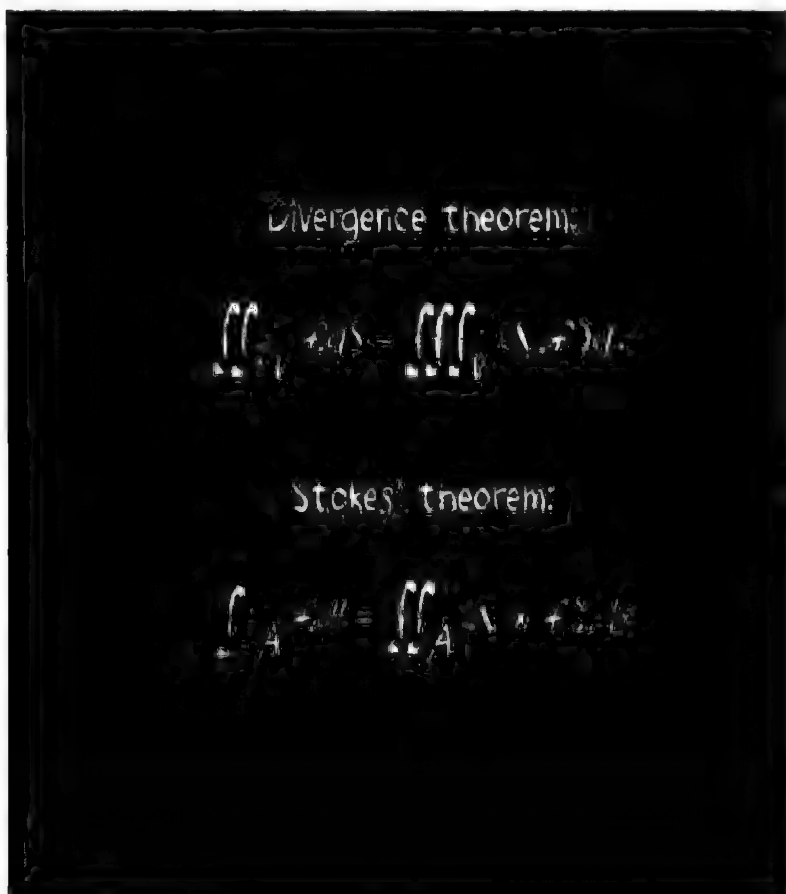


نەخشە ئاراستەبڕەکان

Vector functions

ئاراستەبڕەکان کە پارچەکانی-پێکهێنەرەکانی نەخشەن، وەسفی ئەو پەیوەندییەمان بۆ دەکەن کە لە نێوان دوو یان زیاتر لە دوو گۆڕاودا هەیە، ئەوانیش نەخشەی ئاراستەبڕەکانن کە مەوداکانیان ئاراستەبڕە. بۆ ئەوەی سەر لەو پەیوەندییە دەربکەین، ئەوەیە کە پێکهێنەرەکانی دەتواندرێت داتاشراوە و تەواوکارییان بۆ وەرگیرێت وەک نەخشە ئاساییەکان. جیاکاری خۆشی دەکرێت لە ڕێگەی ئۆپەرەیتەری ئاراستەبرەکان گوزارشتی لێ بکرێت. ئەگەر $f(x,y)$ نەخشەیەکی ڕاستی بێت لە ڕووتەخت، ئەوە لاری (Gradient) نەخشەی f پێناس کراوە لە ڕێگەی نەخشەی ئاراستەبڕی $\left(\frac{\sigma f}{\sigma x}, \frac{\sigma f}{\sigma y}\right)$، کە بەم شێوەش دەنووسرێت Δf ئاراستە و بڕی ئەم ئاراستەبڕە، شتێکمان بۆ دەخاتە ڕوو، ئەویش ئاراستەی گەورەترین ڕێژەی زیادبوون-زیادکردن لە نەخشەی f و ڕێژەی زیادبوونەکەش. ئەم ئیش گۆڕکێیە (operator) ∇ پێی دەوترێت دیل (del)، کە چەندی تایبەتمەندی جوانی هەیە. دوو لە تەواوکارییە پەیوەندارەکان بەو دیلە لە وێنەکە خراوەتە ڕوو.نموونەیەک لە هەمبەر ئەو بابەتە، گۆڕانی خێراییەک لە دەرەوەی سنوری ڕووێک، یەکسانە بە نەخشە ئاراستەبڕە بڵاوبووەکە لە ناو ڕووەکە. ئەمەش ڕوونی دەکاتەوە کەچی ڕوودەدات ئەگەر بێت و تایەک پڕ بکرێت لە هەوا: لەبەر ئەوەی ڕێژە و تەوژمی هەوا لە دەرەوەی تایەکە نەرێنییە، ئەوە

کشـــان و فراونبـــوونی هەوایەکە لە نـــاو تـــایەکە دیســـانەوە نەرێنیـــیە، بە واتایەکی تر، پەستێنراوە.

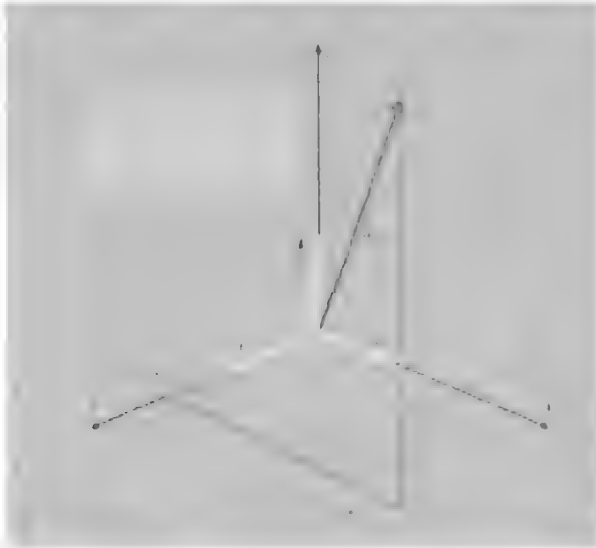


ڕەهەندەکان و سەربەخۆیی بەهێڵ

Dimensions and linear independent

کاتێک لە بارەی شێوەی تەنێک یان هەر شتێک دەدوێین، ئەوە لە ڕووی قەبارەیەکەوە دەدوێین، ئایا چەند دووری هەیە، نەک هەر بۆ شتەکان، تەنانەت بۆ ئاسۆوتەش (Space). بۆ نموونە ئەو بۆشاییەی لە بابەتێکی ماتماتیک کاری لەسەر دەکەین ڕەهەندی هەیە، ئەگەر هەیەتی چەند ڕەهەندە؟ لە ئەندازەی ئیقلیدی و لە ئاسۆوتە ئاساییەکەی ، بازنە، یەک ڕەهەندییە؛ دیسک-پۆپکە، دوو ڕەهەندییە؛ گۆ، سێ ڕەهەندییە. جیاوازی نێوان بازنە و دیسک ئەوەیە کە بازنە چەقێکی هەیە تەنیا بۆخۆی و زیاتر نا، بەڵام لە دیسک چەقێکمان هەیە کە دەبێتە چەق بۆ ناکۆتا بازنەی تر. بۆیە لە دوو ڕەهەندی و سێ ڕەهەندی، لەوە تێدەگەین کە چەند ئاراستەیەکمان هەیە، سەرەوە، خوارەوە، تەنشتەکان: واتە درێژی و پانی و بەرزی. ئەمەش باسی لێوەکراوە بە شێوەیەکی بیرکارییانە بە بەکارهێنانی بیرۆکەی سەربەخۆ. کۆمەڵەیەک لە ئاراستەبرەکان پێیان دەوترێت سەربەخۆی بەهێڵ، ئەگەر بێت و هیچ یەک لە ئاراستەبرەکانی کۆمەڵەکە، نەتواندرێت لە کۆی دوو ئاراستەبری ناو کۆمەڵەکە بنووسرێت. واتە ئەگەر دوو ئاراستەبر لە کۆمەڵەکە کۆبکەینەوە، ئەوە نابێت ئەو بەرئەنجامەی دەستمان دەکەوێت لە ناو کۆمەڵەکە بێت. هەر کۆمەڵەیەک لە n ئاراستەبری سەربەخۆی بەهێڵ، پێی دەوترێن بنچە (basis) بۆ ئاسۆوتەیەکیn ڕەهەندی. هەر ئاراستەبرێک لەو ئاسۆوتەیە ، دەتواندرێت

بە شـــێوەی پێکهـاتەی هێڵـی بنووســرێت لە بــنچەی-Base ئاراســتەبرەکان. لە ئـــاهووتەی ســـێ ڕەهەندیـدا، بـــنچەی-Base ئـاهووتەی دیكـارتی بـــریتییە لە ســـێ ئاراســـتەبڕ، ئەوانـــیش: (0،0،1)وە(0،1،0)،(1،0،0) کە ئەمـــانەش تایبەتمەنـــدییەکی ناوازەیـــان هەیە، کە هەریەکەیـــان ئەســـتون دەبێــت لەســـەر ئەوی تریـــان. بەڵام هەر ســـێ لەئاراســـتەبڕی ســـەربەخۆی بەهێـــل. شـــیاوەی ئەوەن کە ببنە بنچە بۆ ئاهووتەی سێ ڕەهەندی.



ئاراســـــــتەبڕی a دەتوانـــــــدرێت بەهـــــــۆی پێکهێنـــــــەری هێڵـــــــی (Linear combination) بنووســـرێت لە بـــنچە ئاراســـتەبرەکانی i،j و k بەم شێوە: $a = a_x i + a_y j + a_z k$ (بە وردی سەیری وێنەکە بکە).

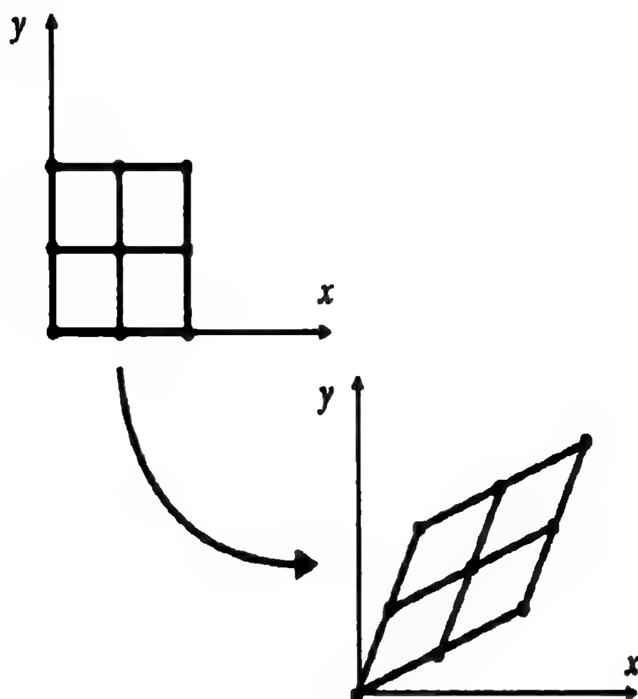
جێگۆڕکێیە هێڵییەکان

Linear transformation

جێگـــۆڕکێی هێڵییەکـــان، بـــڕیتییە لە نەخشـــەیەک، کە هەڵدەســـتێت بە گـــۆڕینی ئاراســـتەبڕێک بـــۆ ئاراســـتەبڕێکی تـــر، ئەویـــش لە ژێـــر ڕۆشـــنایی یاســـاکانی پێکهێـــنەری هێڵـــی (Linear combination). ئەگەر دوو ئاراســـتەبڕمان هەبێـــت و کۆیـــان بکەیـــنەوە، پاشـــان جێگـــۆڕکێ بەو ئەنجـــامە بکەیـــن کە دەســـتمان کەوتـــووە، ئەوە دەبێـــت هەمـــان بەرئەنجـــامی هەبێـــت ئەگەر بێـــت و، پـــێش کـــۆکردنەوەی ئەو دوو ئاراســـتەبڕە، هەر یەکەیـــان بە جیا جێگۆڕکێیان پێ بکەین، پاشان کۆیان بکەینەوە.

ئەگەر a و b دوو ژمـــارە بـــن، وە u و v دوو ئاراســـتەبڕ بـــن، ئەوە جێگۆڕکێی هێڵی L دەبێت لەسەر ئەم یاسایە جێ بەجێ بێت:

$L(au + bv) = a(Lu) + b(Lv)$. جێگـــــــــۆڕکێ هێڵییەکـــــــــان لێکـــدانەوەی ئەنـــدازەییان هەیە کە ســـیفەتی کشـــان و ســـوڕاندن (rotation) دەگـــرنە خۆیـــان. هەر بـــۆیە زمـــانی جێگـــۆڕکێیە هێڵییەکـــان، توانـــای چـــۆنییەتی تەفســـیرکردنی کـــرداره ئاســـاییە ئەنـــدازەییەکانمان پـــێ دەدات. تەنـــانەت ئەمە لە کالکیلەســـیش دەردەکەوێـــت، لە ڕاســـتیدا داتاشـــراوەکان زیـــاتر نـــین لە جێگـــۆڕکێیە هێڵییەکـــان لەســـەر نەخشـــەکان، بـــۆیە لێکـــۆڵینەوە و کـــارکردن لەگەڵ جێگـــۆڕکێیە هێڵییەکـــان، یەکگـــرتنێکە لە دوو لاوە، ئەوانـــیش ئەنـــدازە و کالیکلەس.



کــرداره ئەنــدازەییەکان لەســەر شــێوەکان، دەکرێــت بەهــۆی جێگــۆڕکێی هێڵی وەسفبکرێن، وەک ئەم شێوەی سەرەوە.

ڕیزکراوەکان

Matrices

ڕیزکراوەکـان، بـریتین لە کـۆمەڵەیەک لە ڕیـز و سـتوون، ئەو ڕیـز و ستونانە بە شـێوەیەکی ڕێـک دانـراون. هەر یەک لەو ڕیـز و ستونـانە ژمـارە دەگـرنە خۆیـان. ڕیزکراوەکـان لە نـاو کەوانەیەک دەنوسـرێت، وەک: $\begin{pmatrix} a & b & a \\ c & a & c \end{pmatrix}$ یـان $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. ئەمـانە سـود گەلێکیـان هەیە لە زۆر بـواردا، بەتـایبەتی کـاتێ دەمـانەوێ کـاریگەری جێگـۆڕکێیەکی هێڵـی بـزانین. ئەگەر بێـت و جـووتە ڕێکخراوێکمـان هەبێـت (x,y)، ئەوە جێگـۆڕکێی هێڵـی بە شـێوەیەکی گشـتی ئەو شـێوەیە وەردەگرێـت: $(ax + by \text{،} cx + dy)$، ئەم پرۆسـەیەش ناسـراوە بە لێکـدانی ڕیزاکـراو. ئەو شـێوەیەی نوسـیومانە، دەتـوانین بە Mr دەری ببـڕین. کاتێـک M بـریتییە لە ڕیزکـراوەکە: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، و r بـریتییە لە شـوێنی ئاراسـتەبڕەکە (x,y)، کـاری ڕیزکـراوەکە لێـرە بـریتییە لە نوانـدنی جـوڵەی جێگـۆڕکێیە هێڵیـیەکە. ئەو ڕیزکـراوەی سـەرەوە دوو بە دووە، واتە: 2×2، دەکرێـت بـۆ $n \times n$ ڕیزکـراو دروسـت بکەیـن، ئەو دوو ژمـارەیە دەبێـت لە یەک گەورەتـر بێـت و لە ژمـارە سروشـتییەکان بێـت، چـونکە یەکێکیـان ئامـاژەیە بـۆ ژمـارەی ڕیزەکـان، ئەوەی تـر ئامـاژەیە بـۆ ژمـارەی سـتونەکان. ڕیزکراوێـک هەیە پێـی دەوتـرێن ڕیزکـراوی بـێ لایەن (identity matrix)، وەک چـۆن لە کـۆکردنەوەی ئاسـایی 0 دانەی بـێ لایەنە، بەو شـێوەش لە ڕیزکراوەکـان، ڕیزکـراوی بـێ لایەنمـان هەیە و بە I هێمـا دەکرێـت، ئەو ڕیزکـراوە تیـرە

سەرەکییەکەی (Diagonal) گشتی بریتییە لە ژمارە یەک (1) و دانەکانی تری گشتیان بریتین لە (0)، سەیری ئەو نمونەیە بکە: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ واتە هەر ڕیزکراوێک جارانی ئەو ڕیزکراوەی بکەین، ئەوە دەکاتەوە ڕیزکراوەکە خۆی، وەک چۆن3 جارانی 1 هەر دەکاتەوە 3. هەر دانەیەکی (Entry) ناو ڕیزکراو ناونیشنیکی (Adress) هەیە، کە شوینەکەی لە ناو ڕیزکراوەکە نیشاندەدات. سەرەڕای ئەمەش، ڕیزکراوەکان ڕەهەندییان هەیە. ئەو نمونەی سەرەوە ڕیزکراوێکی 3 × 3 ، کە "سێ بە سێ" دەخوێندریتەوە. ڕیزکراوەکان بۆ تواندنی شت وەک-کەل وپەل بەکاردێت و، لەگەل بەرواری بەسەرچوونی ئەو شتانە... هتد.



شیکارکردنی هاوکێشەی ڕیزکراوەکان

Solving matrix equations

هاوکێشـــەی ڕیزکـــراوە، هاوکێشـــەیەکی بیرکارییـــانەیە کە نەزانراوەکـــانی بـــریتین لە ڕیزکـــراوە. یەکێـــک لە ســـوودەکانی ئەم هاوکێشـــانەش هەر لە نـــاو پانتـــایی بیرکـــاری، بەکاردێـــت بـــۆ شـــیکارکردنی سیســـتمە هێڵییەکـــان و لێکۆڵینەوە لە مەڕ جێگۆڕکێیە هێڵییەکان.

وا دانـــێ کە Mr وەســـفی ئەو کـــاریگەرییە دەکـــات کە بەســـەر ئاراســـتەبڕێک r داهـــاتووە لە کـــاتی جێگـــۆڕکێی هێڵـــی، واتە پرۆســـەی جێگـــۆڕکێی هێڵیمـــان بەســـەر ئاراســـتەبڕی r ئەنجامـــداوە و Mr وەســـفی ئەو جێگـــۆڕکێیە دەکـــات کە چـــۆنە. دواتـــر لە ڕێـــگەی ئەو جێگـــۆڕکێیە هێڵیـــیە، دیســـانەوە ئاراســـتەبڕێکی تـــر دێـــتە کـــایەوە، ئەویـــش نـــاوی دەنـــێین b، لێـــرە دەمانەوێـــت ئەوە بـــدۆزینەوە کە ئەو r ی کە ئاراســـتەبڕێکە، چـــی بـــووە (چ شـــێوەیەکی هەبـــووە) کە ئەو جێگـــۆڕکێیە هێڵـــیەی بەســـەردا هـــاتووە، واتە شـــیکاری ئەو هاوکێشـــەیە $Mr = b$ واتە نـــرخ r چیـــیە؟ خـــوێنەری هێـــژا ڕەنـــگە بڵێـــت چـــۆن خۆمـــان لەو M دەربـــاز بکەیـــن؟ مـــومکینە بڵێـــی هەردوولای هاوکێشـــەکە لای دابەشـــی M دەکەیـــن! وەلامێکـــی ژیـــرانەیە، بەلام هەڵەیە. ئـــێمە نـــاتوانین هەردوو لای هاوکێشـــەکە دابەشـــی M بکەیـــن، چـــونکە M بریتـــی نیـــیە لە تـــاقە ژمـــارەیەک، بەڵکـــو M بـــریتییە لە ڕیزکراوێـــک کە چەنـــد ڕیـــز و ســـتونێکی تێـــدایە لە ژمـــارە. ئـــێمە لە بیرکـــاری شـــتێکمان هەیە، ئەویـــــش، هەر شـــــتێک جـــــارانی هەڵـــــگەڕاوەکەی (Inversr) بکەیـــــن ،

ئەنجامەکەی دەکاتە دانەی بێ لایەن بە گوێرەی سیستەمەکە (ڕیزکراوەیە لێرە)، دانەی بێ لایەن لە کرداری جارانکردن، واتە $\frac{1}{2}\times 2 = 1$. لە ڕیزکراوە، دانەی بێ لایەن ئەمەیە: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ بۆ ڕیزکراوێکی سێ بە سێ. ئێستا بۆ ئەوەی شیکاری هاوکێشەکە بدۆزینەوە، دەبێت هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوکە بدۆزینەوە، ئەگەر بوونی هەبێت!

هەڵگەڕاوەی هەر ڕیزکراوێک بەو شێوە دەردەبردرێت M^{-1}، بۆیە، هەر دوو لای هاوکێشەکە جارانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوی M دەکەین، بۆیە $M^{-1}Me = M^{-1}b$ و لەبەر ئەوەی $M^{-1}M = I$، بۆیە لەمەوە دەگەینە: $Ir = M^{-1}b$ پاشان لەبەر ئەوەی دانەی بێ لایەن؛ جارانی هەر بڕێک دەکاتەوە بڕەکە خۆی، واتە $Ir = r$ بۆیە شیکاری هاوکێشەکە واتە ڕیزکراوی r دەکاتە $r = M^{-1}b$. لێرە شتێک هەیە پێویستە بیزانین، ئەویش ئایا هەردەم هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەیەک بوونی هەیە، وە ئەگەر بوونی هەبێت چۆن چۆنی دەدۆزرێتەوە؟

دۆزینەوەی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە تا گەورەتر بێت، تۆزێک گرانتر دەبێت و تەکنیکی تری ئەوێت، بۆیە لێرە لەسەر نمونەیەکی (دوو بە دوو) باسی لێ وە دەکەین. وادانێ ئەو ڕیزکراوەمان هەیە بە شێوەیەکی گشتی $A = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ بۆیە هەڵگەڕاوەی ئەو ڕیزکراوەیە بە شێوەیەکی گشتی دەکاتە: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ بەو مەرجەی کە $ad - bc \neq 0$.

ئەگەر بیر لە پۆتانی ئەو هاوکێشەیە بکەینەوە، ئەوە لە ڕاستیدا بریتییە لە

کۆمەڵێک هاوکێشەی هێڵی پێکەوە پەیوەست، واتە سیستەمێکی هێڵی، بۆیە ئەسڵی بابەتەکە ئەوەیە کە، دۆزینەوەی شیکاری هاوبەشی سێ ڕووتەخت، هاوشێوەی شیکارکردنی سیستەمێکە کە سێ هاوکێشەی هێڵی پەیوەست بەیەکەوە بەهۆی توانادنی ئاراستەبرەکان لە ڕووتەختدا، هەروەها هاوشێوەیە لەگەڵ شیکارکردنی هاوکێشەی ڕیزکراوە.

هەڵگەراوەی ڕیزکراوە، ئەوەمان بۆ دەردەخات کە کاتێ ڕووتەخت وەک هێڵێک ڕەفتار دەکات لە بۆشایی دوو ڕەهەندی، ئەوە ئەو دوو ڕووە تەختە کە وەک هێڵ ڕەفتار دەکەن یەکتر دەبڕن، بۆیە لەم بارەدا؛ یەکتربڕینەکە تەنیا لەیەک خاڵە، واتە بێ هاوتایە و یەک شیکاری بوونی هەیە، ئەویش بە پشت بەستن بە $ad - bc$ کە نەکاتە سفر. ئەگەر بێت و بکاتە سفر، ئەوە یان هیچ شیکارێکی نییە، وە یان ناکۆتا شیکاری هەیە. ئەو بڕە $ad - bc$: پێی دەوترێت سنووردەری ڕێزکراوەکە (Determinate of the matrix).

لە ڕەهەندی زیاتر، واتە پتر لە دوو ڕەهەند، پرۆسەکە تۆزێک ئاڵۆز دەبێت، بەڵام شێوازی و تەکنیکی جیاواز هەن بۆ ئەوەی لەوانیش تێبگەین و لێکۆڵینەوە ئەنجام بدەین.

ئامووتە پوچەکان

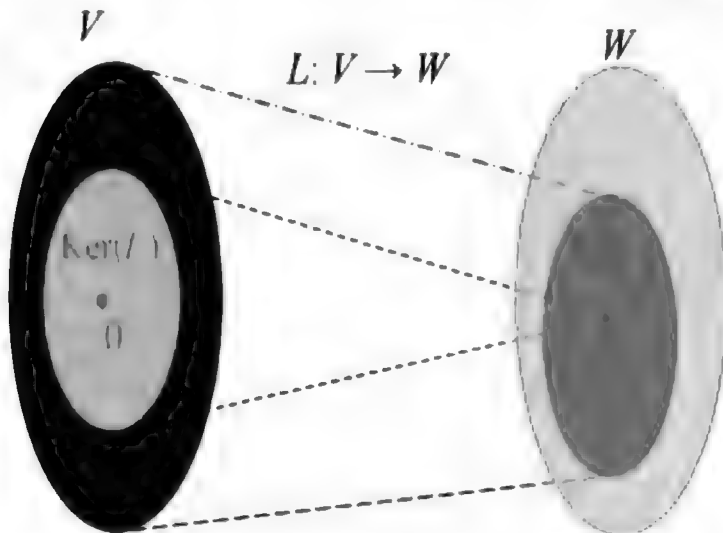
Null spaces

ئـاموتەی پـوچ یـان کێرنەڵـی (kernal)ی ڕیزکراوەشـی پـێ دەڵـێن. ئـــاموتەی پـــوچ، بـــریتییە لە کـــۆمەڵەی هەمـــوو ئەو ئاراســـتەبڕانەی کە نەخشـــەکەی (mapping) دەچێـــت بـــۆ ئاراســـتەبڕێکی ســـفری (zero vector) بەهـــۆی جێگـــۆڕکێی هێڵیـــیەوە (linear transformation). ئەگەربێـت و M ڕیزکراوێـک بێـت، کاتێـک Mr وەسـفی ئەو کـاریگەرییەی جێگـۆڕکێیە هێڵیـیە دەکـات لەسـەر ئاراسـتەبڕێک r هاتبێـت، ئیسـتا ئـاموتەی پـوچ N بـریتییە لە کـۆمەڵەی هەمـوو ئەو خـاڵانەی کە دەبێـتە هـۆی ئەوەی Mr=0. وە ڕەهەنـدی ئەو ئـاموتە پـووچە، پێـی دەوتـرێن: ڕادەی پـوچێتی (Nullity).

بـۆ زانینـی ڕەهەنـدی یـان قەبـارەی ئەو ئاراسـتەبڕەی کە جێگـۆڕکێی هێڵی پێکـراوە، پێویسـتە سـەرنجی ئـاموتەی وێـنە بـدەین (image space)، کە بە بیرکاریـــانە بە $Im(M)$ ئامـــاژەی پـــێ دەکرێـــت. ئـــاموتەی وێـــنە، بـریتییە لە کـۆمەڵەی هەمـوو ئەو خـاڵانەb کە $Mr = b$ بـۆ ئەو نرخـانەی r کە b بەرهەم دێنێـت. ڕەهەنـدی ئـاموتەی وێنەیـی، پێـی دەوترێـت: پـلە-پـــایە (Rank). ئەگەر بێـــت و $Mr = b$ یەک شـــیکاری هەبێـــت بەگـــوێرەی دراوی b ، ئەوە ئـــاموتەک لە شـــیکار هەیە، کە دەکـــاتە ڕەهەنـــدی N، کە وتمـــان N بـــریتییە لە کـــۆمەڵەی هەمـــوو ئە خـــاڵانەی کە $Mr = 0$. ئامانەوێـت زیـاتر بەو شـێوە وشـکە لەسـەر بـابەتەکە بەردەوام بـین، بـۆیە

ئەوەی لەسەرەوە نووسراوە پوختەی ئامووتە پوچەکانە. بە نموونەیەکی ژیانی ڕۆژانە بیرۆکەکە شیدەکەینەوە. وا دانێ شەریکەیەک-کارگە کە بنێشتی ناو قتوو بەرهەم دێنێت، پێش ئەوەی ئەو قوتووە بنێشتانە بکرێتە پاکەتەوە و بنێردرێتە بازاڕ، پشکنینێکی بۆ دەکرێت لە لایەن دەزگایەکەوە، بۆ ئەوەی بزانرێت ئەو قوتووە بەتاڵە یان نا، ئەگەر بەتاڵ بێت ئەوە لایبدات بۆ لایەک. لێرە قووتووە بنێشەکان ئاراستەبرەکانن، دەزگایەکە بۆ جیاکردنەوەی قوتووە بەتاڵەکان جێگۆڕکێیە هێڵییەکەیە. قوتووە بەتاڵەکان دەخرێنە ناو شوێنێکی تایبەت، ئەو شوێنە تایبەتە کە ئەو قوتووە بەتاڵانەی تێدایە، پێی دەوترێت ئامووتەی پوچ.

گەلێ لە کێشە بیرکارییەکان، وەک لە هاوکێشە جیاکارییەکان، دەکرێت بەهۆی ئەو زمانە بیرکارییەوە بنوێندرێت، وە لە پانتایی بیرکاری بە گشتی.



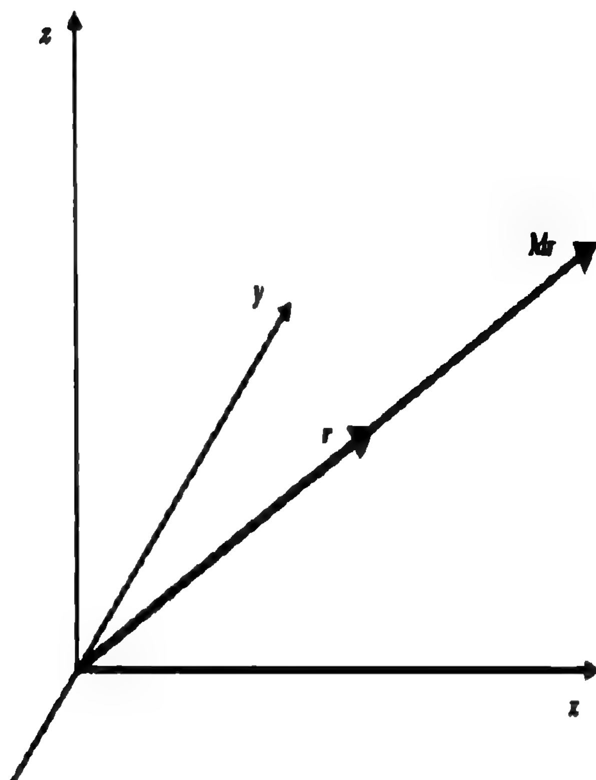
بەها تایبەتییەکان و ئاراستەبرە تایبەتییەکان

Eigenvalues and eigenvectors

بەهـا تایبەتییەکـان و ئاراسـتەبرە تایبەتییەکـان، بـریتین لە کـۆمەڵەیەکی شـان؛ لە برەکـان و ئاراسـتەبرەکان، ئەویـش بەهـۆی پەیوەنـدییەکەوە بە ڕیزکراوێـک. وشـەی Eigen لە زمـانی ئەڵمـانییەوە هـاتووە، کە بە مانـای سـەیر یـان تـایبەت دێـت. ئەگەر بێـت و ڕێزکراوێکـی چوارگۆشـەیمان هەبێـت، واتە $n \times n$ بێـت، نـاوی لـێ بنـێن M ، لەگەڵ بەهـاتی تـایبەتی λ هاوتـایە لەگەڵ ئاراسـتەبری تـایبەتی r، پاشـان $Mr = \lambda r$. لە فیزیـادا، ئاراسـتەبرە تایبەتییەکـان واتـای ئەوەیە کە ئاراسـتەکانیان بە نەگـۆڕی دەمێنیـتەوە بە هـۆی کـاریگەری ڕیزکـراوەکەوە M، وە λ وەسـفی ئەوەمـان بـۆ دەکـات کە چـۆن دوورییەکـان دەگـۆڕێن لەو ئاراسـتەی هەیەتـی لەگەڵ بەهای تایبەتە نەرێنییەکەی.

ئەگەر بێـت و هەوڵ بـدەین ئەم هاوکێشـەیە شـیکار بـکەین $Mr = \lambda r$، ئەوە دەتـوانین هاوکێشـەکە بەو شـێوە بنووسـینەوە $(M - \lambda I)r = 0$، دیـارە ئەم هاوکێشـەیە شـیکاری هەیە، تەنیـا ئەگەر بێـت و $(M - \lambda I)$ ئـاهوتەیەکی پـوچی بەردەری هەبێـت (Non Trivial null space)، ئەمەش واتـا ناکرێـت r لێـرە شـیکاری ئەو هاوکێشـەیە بێـت، واتە نرخـی $r \neq 0$ ، ئەمەش واتـا $M - \lambda I = 0$ بـۆیە سـنووردەری ڕیزکـراوەکە (determinante) کە n بە nە ، لێـرە دەگەیـن بـۆ ڕادەدارێکـی پـلە n لە λ کێشـەی و پرسـی نـرخە تایبەتییەکـان زۆر بـاون، لەبەر

ئەوەی ئەمـــانە زانیـــاری گرنگمـــان بـــۆ دەســـت دەخەن لە هەمـــبەر جێگـــۆڕکێیە هێڵییەکان.

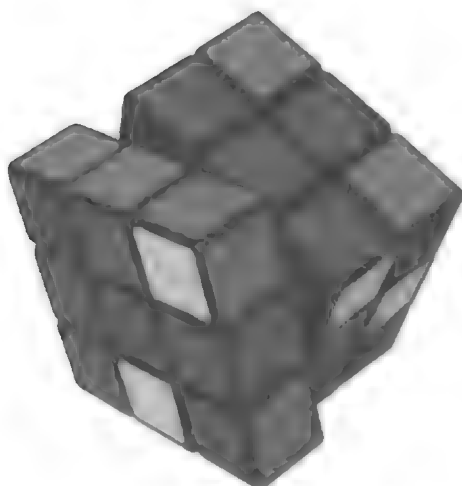


لەم وێـــنەیە باشـــتر لەو نووســـنەی ســـەرەوە تێـــدەگەین. ئاراســـتەبڕی r ئاراســـتەبڕێکی تـــایبەتە بـــۆ ڕیزکـــراوەی M ئەگەر ئەم دووانە، r و Mr ڕوو لە هەمان ئاراستە بن!

بەشی هەشتەم

جەبری پوخت- ڕووت

Abstract algebra

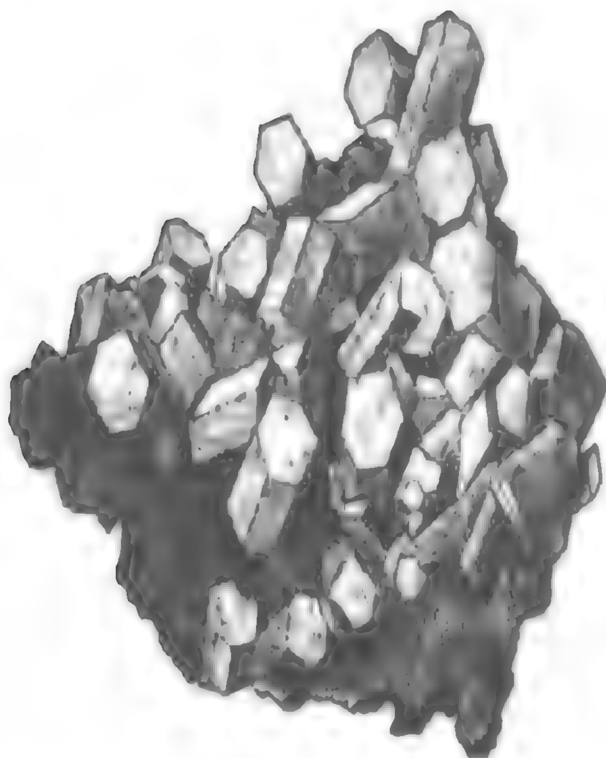


جەبری پوخت (پەتی)

Abstract algebra

جەبری پوخت-پەتی، یەکێکە لە لقە هەرە سەرەکییەکانی بیرکاری. جەبری پوخت چەند پێکهاتەگەلێک لەخۆ دەگرێت، وەکو تیۆری گرووپ، تیۆری ئەڵقە، تیۆری مەیدان (Field)، وە ئاهووتەی ئاراستەبڕەکان... ، کە تێیدا هەر یەکەیان بەهۆی چەند یاسایەکی جیاوازەوە دانەکانی دەستە-کۆمەڵەیەک پێکدەهێنن لە ژێر ڕۆشنایی ئەو یاسایانە کە پێیان دەڵێن بەڵگەنەویست- ئەکزۆم. دواتر لەم سۆنگەیەوە دەلکێن بە کۆمەڵەیەک. کاری ئەو پێکاهاتانەش هەمووی کرداره ئاساییەکانی وەک کۆکردنەوە، کەمکردنەوە، جارانکردن... دەگرنە خۆیان، لەگەڵ ژمارەکان. وەک: ئاهوتەی ئاراستەبڕەکان کە یەکێکە لە پێکهاتەکانی جەبری پوخت کە کۆمەڵەیەک لە ئاراستەبڕ دەگرێتەوە لەگەڵ یاسا و تایبەتمەندییە پەیوەندیدارەکانی نێوانیان. ئەم یاسایانەش وەسفی چۆنییەتی پێکهێنانی ئەو شتانە دەکەن لە میانەی ڕەفتاری بابەتەکە، دواتر دەکرێت بخرێتە ناو چارچێوەیەک وەک کۆمەڵەیەک لە تایبەتمەندییەکانی ئەو شتە. لە ئاهووتەی ئاراستەبڕەکان، یاساکان وەسفی کۆکردنەوە و بە برلێکدانی ئاراستەبڕەکان دەکەن. بە دوورکەوتنەوە و بەلاوە نانی گرنگی و بەکارهێنانیان لە ئاهووتەی ڕاستی بەرە و کۆمەڵەی جەبری پەتی تر، واتە گرنگی ئەوانە لە جیهانی پەتی، ئەوە دەبنە سروشتی ئەو ڕێگایەی کە بیرکاریزانەکان تێدا بیرۆکەکانیان گەشە پێ دەدەن و بەرەو پێشیان

دەبەن. سەرباری ڕووتاندن و سنوورداركردنیان، پێكهاتە ناوازەكەیان ئەنجام و دەرئەنجامی گرنگی هەیە لە زۆر بواری تردا، بۆ نموونە لە پێكهێنانی تۆپۆلۆجی.



تیۆری گرووپ ڕۆڵێكی سەرەكی دەگێرێت لە تێگەیشتن لە پێكهاتەی كریستاڵەكان.

تیۆری گرووپ

Group theory

گرووپ، بریتییە لە بونیادێکی بیرکاریانە، کە پێکدێت لە کۆمەڵەیەک (Set) لەگەڵ کردار-ئۆپەرەیشنێکی دووانی، کە دەکرێت ئەو ئۆپەرەیشنە (کردارە) وەکو کۆکردنەوە یاخود لێکدان سەیر بکرێت. بەلام بەشێوەیەکی گشتی کردارەکە بەم شێوە * هێما دەکرێت.

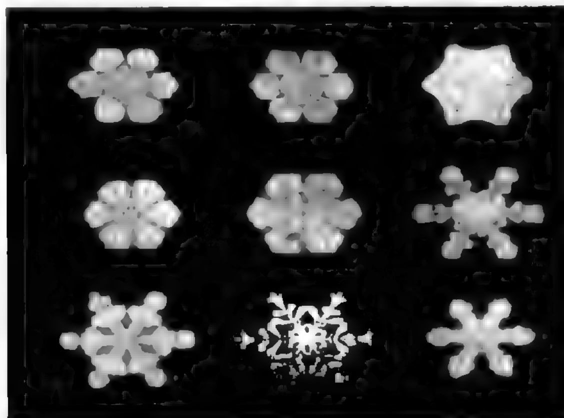
بۆ هەر کۆمەڵەیەکی وەکو G و هەر سێ دانەیەک لەم کۆمەڵەیە a،b،c ، مەرجە کە ئەم چوار بەڵگەنەویستەی خوارەوەی لێ بێتە جێ، بۆ ئەوەی پێی بوترێ گرووپ:

1) بەستراو (Closed): گەر هاتوو هەریەکە لە a،b لەناو G بن ئەوە دەبێت $a * b$ لەناو G بێت.
2) یەکتربەستن (Associativity): مەرجە کە:
$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$
3) دانەی بێ لایەن (Identity element): مەرجە کە دانەیەکی وەکو e هەبێت لەناو G دا کە $a * e = e * a =$ بۆ هەموو دانەیەکی ناو G a، کە پێی دەوترێت: دانەی بێ لایەن.
4) هەڵگەڕاوە (Inverse): بۆ هەموو دانەیەکی وەکو a لەناو G مەرجە دانەیەکی تر هەبێت کە بە دژ ناوی دەبەین و بەم جۆرە هێمای دەکەین a^{-1} کە:

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

سادەترین نموونە لەسەر گرووپ، بریتیە لە ژمارە تەواوەکان لەگەڵ کرداری کۆکردنەوە واتە $(\mathbb{Z},+)$. روونە دەبێت دانەی بێلایەن بکاتە سفر، چونکە تەنها سفرە لەگەڵ هەر ژمارەیەکی تردا کۆبکەینەوە ئەنجام دەکاتە ژمارەکە خۆیی.

گرووپ گرنگی و جێبەجێکردنی زۆری هەیە، چونکە دەکرێت ئەم خاسیەت و بەڵگەنەویستانە وەکو خاسیەتی فیزیایی تەماشابکرێت، دەکرێت گرووپ لەسەر چەندلا (Polygon) پێناسە بکەین و دواتر تەوەرەکانی هاوجێبوون دەوری دانەکانی کۆمەڵەکە دەبینین، واتە ژمارەمان نیە لەم کۆمەڵەیە، بەڵکو کۆمەڵێک خاسیەتی فیزیایی (جیۆمەتری) مان هەیە، نموونەی تر کە دەکرێت سود لە بیرۆکەی گرووپ وەرگرین بۆ تێگەیشتن لێیان، وەک، کڵوە بەفر، ئەمانە هەموو کۆمەڵێک بونیادی فیزیایین، کە دەکرێت وەکو نموونەی گرووپ تەماشا بکرێن.

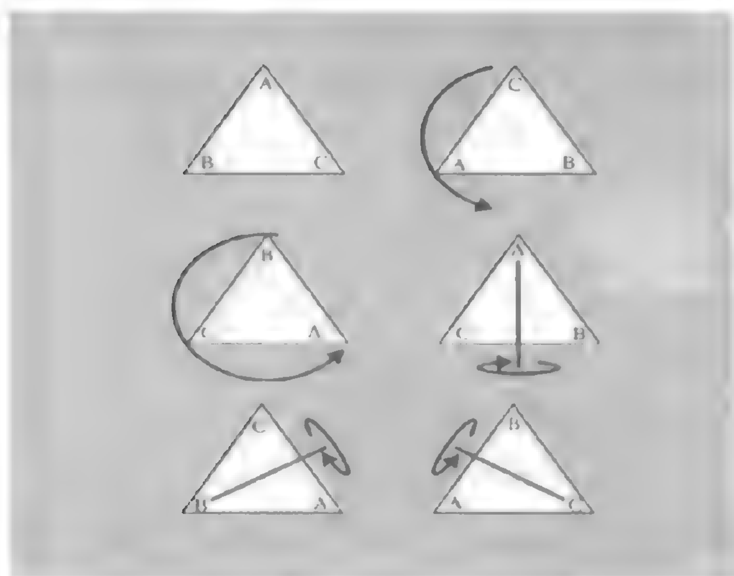


گرووپە هاوجێیەکان

Symmetry groups

وادانێن سێگۆشەیەکی سێ لا یەکسانمان هەیە، ئەگەر بێت ئەو سێگۆشەیە بە ئاراستەی میلی کاتژمێر 120 پلە بیخولێنینەوە، ئەوە دەبینین هیچ شتێکی جیاواز ڕووی نەداوە، چونکە سەرەتا سێگۆشەکە چۆن دانرابوو، دوای ئەوە کە بە 120 پلە سوڕاندمان، هەر هەمان شێوەی سەرەتای وەردەگرێتەوە. یان کاتێک سێگۆشەکە ڕووی وەردەگێڕین، دەبینین دووبارە هیچ شتێک ناگۆڕێت. بۆیە گرووپی هاوجێ؛ ئەو گرووپەیە کە بە چەند ڕێگایەکی جیاواز، نواندنی هەیە لە ژێر جێگۆڕکێدا، کە هیچ جیاوازییەکی نابێت لەگەڵ شێوە یان سیفەتە بنەڕەتییەکەی، واتە دوای گۆڕان و پێش گۆڕان هەمان سیفەت و تایبەتمەندی دەبێت بە بەراورد بە شێوە بنەڕەتییەکەی. ئەگەر بێت وا دانێین a مەبەست لێی سوڕاندن بێت، وە b مەبەست لێی ڕوو وەرگێڕان بێت، ئەوە دەتوانین کرداری جارانکردن بەکاربێنین بۆ ئاوێتەکردنی ئەو دوو سیفەتە a و b. بۆیە ئەگەر بڵێن a^2b، ئەوە مەبەستمانە بڵێین: سێگۆشەکە دوو جار بە گۆشەی 120 بیخولێنەوە و، جارێکیش ڕووی وەرگێڕە. لە ڕاستیدا 6 ڕێگەی جیاواز هەن بۆ بەرهەم هێنانی جێگۆڕکێ لە ڕووکاری ئەو شتەی هەمانە (وەک لە وێنەکەدا دیارە)، ئەوانیش a^2b وە e، a، a^2،b،ab بەدەر لەم ئەگەرانە، ئەگەر بیر لە شتی تر بکەیتەوە، لە ئەنجامدا هەر شێوەیەی یەکێک لەمانەی سەرەوە وەردەگرێت و هاوتای ئەوانە دەبێت. مەبەست لە

e بـــریتییە لە دانەی بـــێ لایەن لەو گـــرووپە، واتە ئەو سێگۆشـــە ڕەســـەنەی یەکەمجـار هەمـانە. ئەگەر بێت و سـەیر بکەیـن b^2 یان a^3 یەکسـان دەبـن بە e ، واتە دانەی بێ لایەن.



لەم وێـنەی سـەرەوە، هەر6 دانەکەی؛ گرووپـی هـاوجێی سێگۆشـەی سێ لا یەکسان خراوەتە ڕوو بە شێوەی ئەندازەیی.

بنەگرووپەکان و بەرکەوتە گرووپەکان

Subgroups and quotient groups

بنە- بەشە گرووپ (Subgroup) بەشێکە لە گرووپ، واتە بەشە کۆمەڵەیە لە گرووپێکی تر کە هەموو مەرجەکانی گرووپ جێ بەجێ دەکات. لەبەر ئەوەی دانەی بێ لایەن{e} خۆی بەتەنیا دەبێتە گرووپ، بۆیە هەمیشە بۆ هەموو گرووپێک بەلایەنی کەم بنەگرووپێک هەیە، واتە هیچ گرووپێک نییە بنەگرووپێکی نەبێت.

لە بابەتی پێشوو باسی گرووپی هاوجێمان کرد لەسەر سێگۆشەی سێ لایەکسان، کە دانەکانی ناو گرووپەکە بریتین لە $\{e,a,a^2,b,ab,a^2b\}$ کاتێک a بریتییە لە سوڕاندن بە پلەی 120 وە b بریتییە لە وەرگێرانی ڕوو. بۆیە ئەم گرووپە، دوو بنەگرووپی بەردەری[81] (Non-trivial) هەیە، ئەوانیش $\{e,a,a^2\}$ کە سوڕاندنە، $\{e,b\}$ کە ڕوو وەرگێرانە. هەر یەک لەم دوو بنەگرووپە، پێیان دەوترێن گرووپی بەپات-خولی(دەوری)، کە هەمیشە لەبنەگرووپەکان، دانەی بێ لایەنی تێدایە {e}، چونکە بێ دانەی بێ لایەن، گرووپ و بنەگرووپ دروست نابێت.

[81] دۆزینەوەی وشەیەکی گونجاو بۆ ئەم چەمکە زۆر هیلاکی کردم. وشەی 'بەردەر و بێ بەر' زۆر بەکاردێت لە زمانی کوردیدا، بەتایبەت لە چینی جوتیاران، کاتێک درەختێک بەرهەمی نییە، ئەوە پێی دەڵێن درەختێکی بێ بەرە، ئەگەر بەرهەمیشی هەبێت، پێی دەڵێن ئەمە درەختێکی بەردەرە-بەبەرە.

ئەگەر بێت و H بنەگرووپ بێت لە G و، ghg^{-1} بوونی هەبێت لە ناو H بۆ هەموو h یێک لە H و g لە G، ئەوە H پێی دەوترێت بنەگرووپی یاسادار (Normal subgroup). بنەگرووپی یاسادار، ڕێگەخۆشکەرە بۆ دروستکردنی گرووپێکی نوێ لە ڕێگەی گرووپە کۆنەکەوە، ئەوەی سەرەتا هەمان بوو.

بەرکەوتە گرووپ، بریتییە لەو گرووپەی کە لە ڕێگەی دانەکانی گرووپەکە لەگەڵ یەکێک لە بنەگرووپە یاسادارەکان دروست دەکرێت. بۆ ئەوەی بەرکەوتە گرووپێک بدۆزینەوە لە ژێر ڕۆشنایی گرووپێک، ئەوە پێوستە ئەو گرووپە بنەگرووپی یاساداری هەبێت. ئەگەر بێت و H بنەگرووپی یاسادار بێت لە گرووپی G، ئەوە بۆ هە دوو دانە a و b لە G، ئەوە یەکێک لەم دووانە:

1) $aH = Ha$، کاتێک xH بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ئەو خاڵانەی کە شێوەی xh هەیە بۆ هەندێک لە h لە H.
2) وەیان ئەو دوو کۆمەڵەیە هیچ دانەیەکی هاوبەشیان نەبێت.

لە مانەوەش گرووپێکی نوێمان دەستدەکەوێت بە ناوی بەرکەوتە گرووپ. ئەمەش واتای ئەوەیە کە دەتوانین بیر لەو کۆمەڵانە بکەینەوە وەک

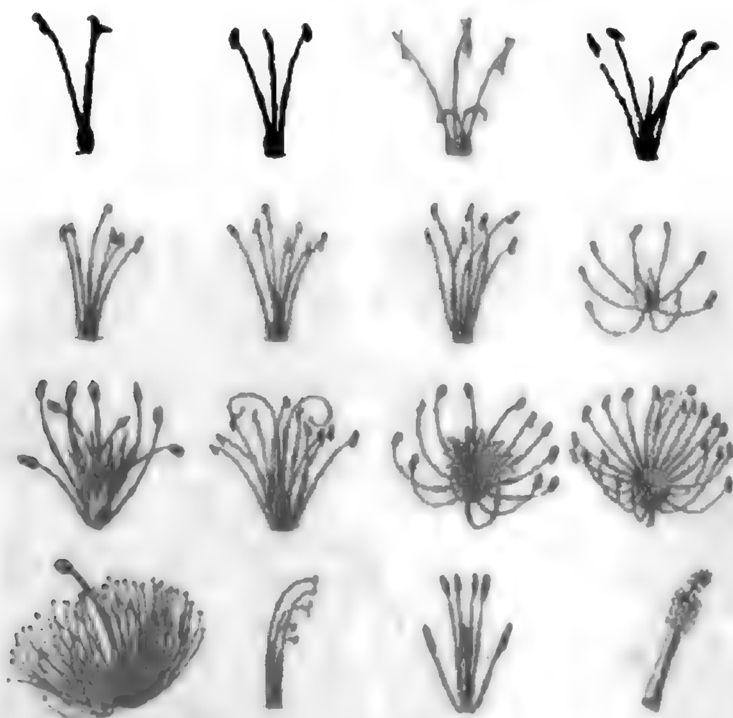
دانەکـــانی کـــۆمەڵەیەکی نـــوێ، کە لەگەڵ یاســـای ئاســـایی پێکهانـــان $(aH)(bH) = abH$. بەرکەوتە گرووپ بە G/H هێما دەکرێت.

بەرکەوتە گـرووپ و بنەگرووپـی یاســادار، ئەومــان بـۆ روونــدەکەنەوە کە چـۆن گرووپەکــان دەکرێــت وەک هۆکاربەنـدییەک بێــت بــۆ گرووپـی بچـــوکتر لە G، کە ئەمەش یـــارمەتی تێگەیشـــتنمان دەدات لە گـــرووپە ڕەســەنەکەی خۆمــان. ئەم بنەگرووپــانە وەک بنــاغەیەک کــاردەکەن و گـرنگن بـۆ گـرووپە ڕەسـەنەکە، وەک چـۆن بە هەمـان شـێوە پێکهـاتەی ژمارەکـان لە ڕێـگەی ژمــارە خۆبەشـەکانەوە وەسـف دەکـرێن، کە لە بابەتەکـانی پێشــووتر باسـمان کـرد. بـۆیە لە بـابەتی گـرووپ، ژمـارە خۆبەشـەکان تایبەتمەنـدییەکی ناوازەیـان هەیە، ئەویـش ئەوەیە کە جـگە لە خۆیـان، بنەگرووپـی بەردەریـان نیـیە، تەنیـا بنەگرووپـی بـێ بەرییـان (trivial) هەیە، واتە وەک چـۆن ژمـارەی خۆبەشـــەکان نـــاتوانین لێکیـــان هەڵبوەشـــێنینەوە، بەو چەشـــنەش ئەو گرووپـــانەی لەســـەر ژمـــارە خۆبەشـــەکان دادەمەزرێـــن، بنەگرووپـــی بەردەرییان لێ ناکەوێتەوە.

گرووپە سادەکان

Simple groups

گـــرووپە ســـــانا-ســـــادەکان، ئەو گرووپـــانەن کە هـــیچ بەرکەوتە گرووپێکـــی بەردەرییـــان نیـــیە. کە بنەگرووپەکانیشـــی تەنیـــا بـــریتییە لە دانەی بـــێ لایەنەکەی، یـــان گـــرووپە ڕەســـــەنەکە خـــۆی. ئەمەش ڕێـــک وەک تایبەتمەنـــدییەی ژمـــارە خۆبەشـــەکان وایە، کە ئەوان جـگە لە خۆیـــان و ژمـــارە 1 بەشـــداربووی تریـــان نیـــیە. وەک ژمـــارە خۆبەشـــەکان، کە چـــۆن ناکۆتـــا ژمـــارەی خۆبەشـــمان هەیە، بەم چەشـــنەش ناکۆتـــا گرووپـــی ســـادەمان هەیە، بەڵام جیـــاواز لە ژمـــارە خۆبەشـــەکان، گـــرووپە ســـادەکان دەکرێـــت بە شـــێوازێکی ورد و ڕێـــک پـــۆلێن بکرێـــت. پـــۆلێنکردنەکەش لە ســـاڵی 2004 یەکێـــک بـــووە لە گەورەتـــرین دەســـتکەوتە بیرکارییەکـــان لە 50 ســـاڵی ڕابـــردوو. گـــرووپە خولییەکـــان (دەوری-Cyclic) و خێزانـــی گـــرووپە جێگرەوەکـــان (Alternating groups)، ئەمـــانە هەردووکیـــان لە گـــرووپە ســـادەکانن. ئەو گرووپـــانەش بەهـــۆی-لەکـــاتی لێکـــۆڵینەوە لە مەڕ کـــۆمەڵە کۆتادارەکـــان پەیـــدادەبن. هەروەهـــا 16 خێزانـــی دیـــکە هەن لە گـــرووپە ســـادەکان، یەکێـــک لەوانە پێیـــان دەوترێـــت: جـــۆرە گرووپەکـــانی لای (Lie groups). خێزانێکـــی تـــر کە شـــاز و جیـــاکراوەن، پێیـــان دەوترێـــت گـــرووپە پچڕپچڕەکـــان (Sporadic groups)، وە گرووپـــی شـــەولەبان-دڕنـــدە (Monster group). ئەوانـــی تـــریش ناســـراون بە: نەویســـتەکان (Pariahs).



"کارل فـۆن **لینە**" سیستەمی تاکسۆنۆمیک بایۆلۆژیکی دانا بۆ پۆلێنکردنی ڕووەکاکان **بە** پێی شێوە و پێکهاتەکانیان، کە ئەم کارە هاوشێوەی پۆلێنکردنی گرووپە بیرکارییەکانە.

گرووپی شەولەبان-ئەژدیها

The Monster Group

گرووپی شەولەبان[82] یان ئەژدیها، یەکێکە لە گەورەترین گرووپە نەویستە سادەکان و گرنگییەکی زۆری هەیە لە پۆلێنکردنی گرووپە کۆتادارەکان. ئەم گرووپەش هیچ بنەگرووپێکی بەردەری نییە، ئەوەشی هەیەتی گرووپە خۆی و لەگەڵ دانەی بێ لایەن، کە ئەمانەش بنەگرووپی بەردەر نین. لە ساڵی 1970 پرسیارێک لە مەڕ گرووپی درندە هاتە ئاراوە، دواتر لە ساڵی 1982 لە لایەن "رۆبێرت گریسی" یەکلابۆوە و شیکارەکەشی لە چەند پەڕێک بڵاو کردەوە بە ناوی ئەژدیهای هاوڕێیانە- the friendly monster کە تێدا لە:

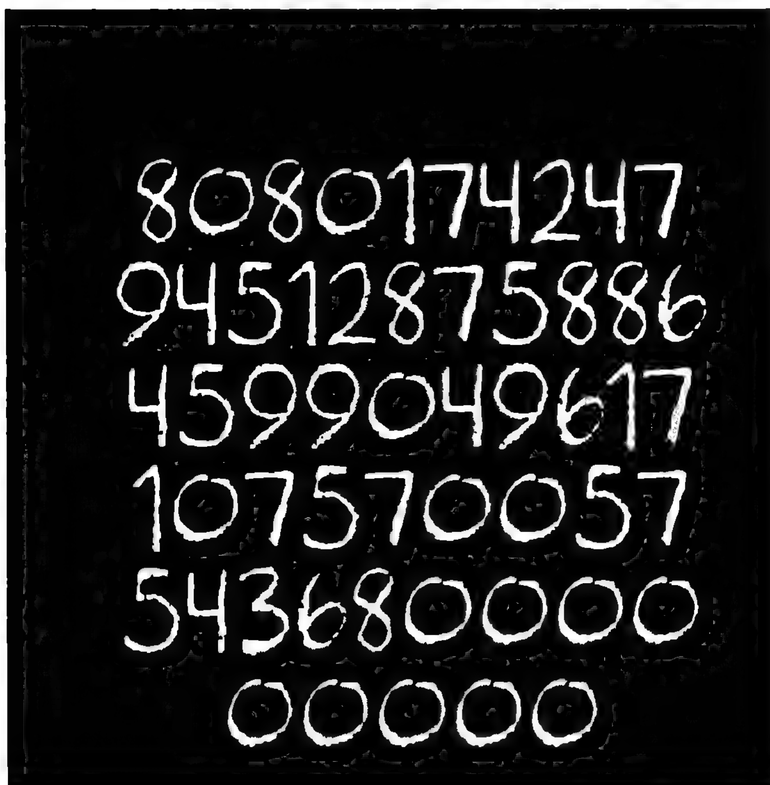
808017424794512875886459904961710757005754368000000000

دانە پێکهاتبوو، واتە (نزیکی 8×10^{53}). کە بە شێوەی ریزکراوە نووسرابوو، وە (883،883 x 196،196) ریز و ستوونی پێویست بووە. قەبارەی گرووپی لەو شێوە کاتێکی زۆر دەبات بۆ ئەوەی دڵنیا بین کە

---

82 خەڵکی هەولێر زۆر جار لە گێڕانەوەی چیرۆک بۆ منداڵەکانیان، وشەی "شەولەبان" بەکاردێنن.

دەشێت بۆ هەموو گرووپە پچڕ پچڕەکان ڕوونبکرێنەوە. هەر چەندە ئەمانە لەسەرەتای سەدەی نۆزدەهەم دۆزرانەوە، بەڵام بە شێوەیەکەی تەواو تەفسیر و لێکدانەوەیان بۆ کرا لە سەرەتاکانی سەدەی بیستەم.



گرووپەکانی لای

Lie groups

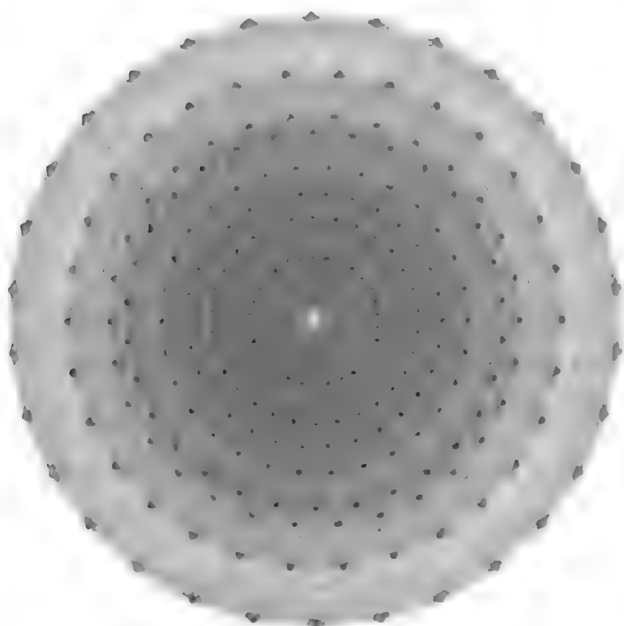
گرووپەکانی لای[83] کۆمەڵە گرووپێکن لە ناو خێزانێک، کە گرنگییەکی زۆریان هەیە، کە دانەکانی پشت بە گۆڕاوە بەردەوامەکان دەبەستن، کە بە پێچەوانەی پێکهاتەی گرووپی شەولەبان و گرووپە هاوجێیەکان لە مەڕ چەند لایەکان. بۆنموونە، ئەگەر بێت و سەرنجی هاوجێیەتی بازنە بدەین، دەبینین کە سووڕاندن بە هەرگۆشەیەک بە نزبەت چەقەکەیەوە، هەر دەکاتەوە بازنەکە خۆی، واتە بێ هیچ گۆڕانکارییەک، بۆیە گرووپی هاوجێ لە مەڕ بازنە ناتواندرێن وەک گرووپە هاوجێیەکانی تر لە مەڕ چەندلایەکان پۆلێن بکرێت، بۆ نموونە لەگەڵ سێ لایەکی ڕێک کە 6 دانەی جیاوازی هەیە. گرووپی هاوجێیەتی بازنە، یەکێکە لە گرووپەکانی لای.

تیۆری گرووپە بەردەوامەکان زۆر ئاڵۆزترە بە بەراورد لەگەڵ گرووپە پچڕ پچڕەکان، لەگەڵ ئەمەش، گرووپەکانی لای باشترینە بۆ تێگەیشتن لەمانە. مومکینە ئەمانە تەفسیر بکرێن تەنیا بەهۆی سروشتی پارامیتەرەکانیانەوە، بەڵام ئەمانە شتانێکی زۆر زیاتریان بۆ دەمێنێتەوە وەک لە پێکهاتە بەردەوامەکانیان. ئەمە دەکرێت بە شێوەیەکی ساف

---

[83] ناوی ئەو کەسەیە کە گرووپەکەی دۆزیوەتەوە.

(smooth) یـــان جیاکـــارانە، یـــا فرەیـــی ببینـــدرێت، کە جـــۆری تـــایبەتین لە ئاموورتەی تۆپۆلۆجیانە.



نواندنی یەکێک لە گرووپەکانی لای E8.

تیۆری ئەڵقە

Ring theory

تیـــۆری ئەڵـــقە، بـــریتییە لە پێکهـــاتەیەکی پەتـــی بیرکارییـــانە کە کـــۆمەڵەیەک دانە بەیەکەوە لە خۆدەگرێـــت لەگەڵ جـــووتە کردارێکـــی دووانـــی. لەمەو پـــێش گرووپمـــان بـــاس کـــرد، کە تەنیـــا لە یەک کـــرداری دووانـــی لەخـــۆ دەگرێـــت لەگەڵ کـــۆمەڵەیەک لە دانەکـــان. لە تیـــۆری ئەڵەقەکـــان، کردارەکـــانی وەک هەمیشـــــە، بە (+) کـــۆکردنەوەو و (×) جـــارانکردن بانگـــدەکرێن، وەک چـــۆن لەگەڵ گرووپەکـــان کاتێـــک لە ژێـــر ڕۆشـــنایی لە یەکێـــک لە کردارەکـــان، ئەگەر دوو دانەمـــان بەســـەریدا جێبەجـــێ کردبـــا، دەبـــوو ئەو ئەنجـــامەی بەدەســـتمان دەکەوێـــت لە هەمـــان تـــووخمی ئەو دوو دانەیە بـــوایە، ئەمە بـــۆ ئەڵـــقەش هەر وایە. بەڵام جیـــاواز لە گـــرووپ، کاتێـــک لە گـــرووپ شـــتێکمان نەبـــوو بە نـــاوی ســـیفەتی ئـــاڵوگۆڕی ، بـــۆیە کـــرداری کـــۆکردنەوە لە تیـــۆری ئەڵـــقە پێوســـتە ســـیفەتی ئـــاڵوگۆڕی (Commutative) هەبێـــت. بە واتـــایەکی تـــر، بـــۆ هەر دوو دانە a و b ئەوە دەبێـــت $a + b = b + a$. کە دەبێـــت لەو پرۆســـــــەیە دانەی بـــــێ لایەن (Identity) و هەڵـــــگەڕاوە (Inverse) بـــــۆ دانەکـــان بـــوونی هەبێـــت، بـــۆیە دەبێـــت لە کـــرداری جـــارانکردنیش ســـیفەتی یەکتربەســـــتنی هەبیـــت. بەکـــورتی، دوو ڕێســـاکە کە دەبێـــت ڕووبـــدات و بێتەجـــێ لە کـــاتی پـــێکەوە کۆبـــوونەوەی کردارەکـــانی کـــۆکردنەوە و جـــارانکردن، ئەوانـــیش یاســـای یەکتـــر بەســـتن (Associative) بەســـەر کۆکردنەوە، واتە پێکەوە بەستانی جاران و کۆکردنەوە بەیەکەوە:

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ و $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

کـۆمەڵەی ژمـارە سروشـتییەکان، ڕێژەییەکـان و ڕاسـتییەکان ئەمـانە گشـتی ئەڵـقەن. لەگەڵ ئەمەش، ئەڵقەیەکـی گشـتی چەنـد تایبەتمەنـدییەکی هەیە، ئەگەر بێـت و $a \neq 0$ ، کاتێـک 0 بـریتییە لە دانەی بـێ لایەن لە کـرداری کـۆکردنەوە، کـاتێکیش ئەو ژمـارەیە لەگەڵ ژمـارەی تـر دەگەنە یەکتـر لە کـاتی بەکارهێنـانی کـرداری کـۆکردنەوە، ئەوە ئەو ژمـارەی لەگەڵـی دێـت وەک خـۆی دەمێنێتـەوە: $1 + 0 = 1$ ، بەڵام ئەگەر $a \times b = 0$، ئەوە نـاتوانین بریـار بـدەین کە کامەیـان دەبێـت سـفر بێت، ئەگەر چیـی زۆر ڕوونـیش دیـارە بـۆ ژمـارە ڕێژەییەکـان و تەواوەکـات یـان ڕاسـتییەکان. سـەرەڕای ئەمـانەش، تیـۆری ئەڵـقە بە شـێوەیەکی سروشـتیانە سـنووردار دەکرێـت لە پانتـایی بیرکاریـدا، بە تـایبەتی بە پەیوەنـدی لەگەڵ تیـۆری گـرووپ، سـنووردارکردنیش وەک ڕێـگەدان بە لابـردن و سـڕینەوە لە کـرداری جـارانکردن، وەک لەو هاوکێشـەیە: $a \times b = a \times c$ لێـرە دەکرێـت a لابردرێـت (Cancellation). بـۆیە ئێسـتا دێـن بە شـێوەیەکی ڕسـمی پێناسـەی ئەڵـقە دەکەیـن: ئەڵـقەیەک R بـریتییە لە کـۆمەڵەیەک (Set) لەگەڵ جـووتە کردارێکـی دووانـی (Two binary operation) ئەوانـیش (+) و (.) ئەگەر هاتوو ئەو چەند مەرجەی خوارەوەی تێدا بێتە دی:

i. پێوستە $(R,+)$ ئەبیلییەن گرووپ بێت (Abelian).

ii. بـــۆ هەمـــوو دوو دانە $a,b \in R$ بە هەمـــان شـــێوە دەبێـــت $a.b \in R$

iii. ســـیفەتی یەکتـــر بەســـت، $(a.b).c = a.(b.c)$ بـــۆ هەمـــوو سێ دانەیەک $a,b,c \in R$

iv. ســـیفەتی بەشـــینەوە لە نـــاو R، کە بـــۆ هەمـــوو ســـێ دانەیەک $a,b,c \in R$ دەبێت

$$(a+b).c = a.c + b.c \text{ و } a.(b+c) = a.b + a.c$$

تێبینی: مەبەست لە "ئەبیلییەن گرووپ" سێ شتە، ئەوانیش:

i. $(R,*)$ سیفەتی ئاڵوگۆڕی هەبێت (Commutative)

ii. (R,o) نیوەگرووپ بێت (Semigroup)

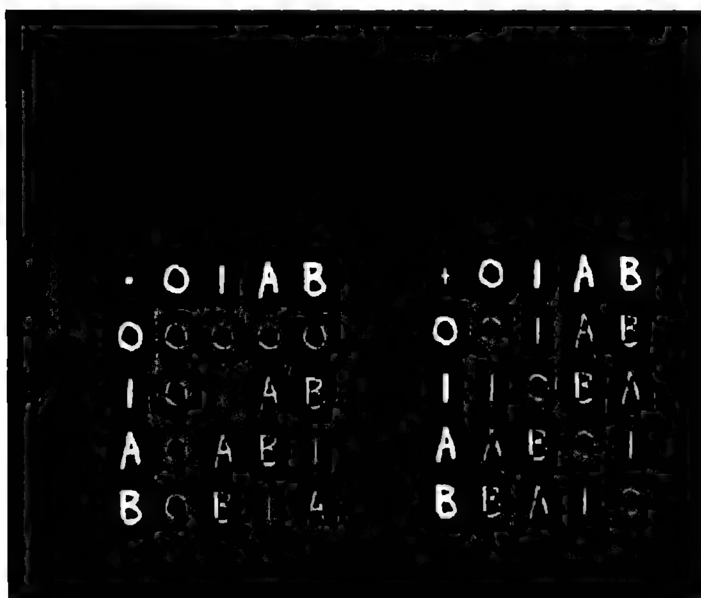
iii. سیفەتی ئاڵوگۆڕی بێتەدی.

مەیدانەکان

Fields

مەیدانەکان، بریتین لە بونیاتێکی جەبری پەتی کە دوو جووتە کردار لەخۆی دەگرێت. هەر وەک تیۆری ئەڵقە، ئەو کردارانەش بریتین لە جاران کردن و کۆکردنەوە، وە بەهەمان شێوە سیفەتی ئالوگۆڕی بۆ هاتۆتە سەر بە هەمان فۆرمی تیۆری گرووپ کە پێشتر باسمان کرد. تیۆری مەیدان هەر لە دەڤەری تیۆری ئەڵقە دروست دەبێت، چونکە هەر ئەڵقەیەک ئەگەر هاتوو: 1) هەڵگری سیفەتی ئالوگۆڕی بوو لەگەڵ هەبوونی دانەی بێلایەن. 2) بۆ هەر دانەیەک، هەڵگەڕاوەکەی بوونی هەبێت. ئەوە بە هاتنەجێی ئەو دوو مەرجە، **تیۆری مەیدان** دروست دەبێت. بۆیە بۆ هەر دوو دانەیەک a و b، ئەوە: $a \times b = b \times a$ ، وە جگە لە بوونی دانەی بێ لایەن لە کرداری جارانکردن وەک لە تیۆری گرووپ و، هەروەها سیفەتی یەکتر بەستن کە لە ئەقڵەش دەهاتە دی. پێناسەی مەیدان دەڵێت: **مەیدان بریتییە لە ئەڵقەیەکی هەڵگری سیفەی ئالوگۆڕ (Commutative ring) لەگەڵ دانەی بێ لایەن بە نزبەت کرداری جاران، وە بۆ هەر دانەیەک کە سفر نەبێت، هەڵگەڕاوەکەی وجودی هەبێت.** ئەمەش واتای ئەوەیە دابەشکاری لە مەیدان مومکینە بۆ هەموو دانەکان بێجگە لە دانەی بێ لایەن لە کرداری کۆکردنەوە. ئەوەش واتە، بە پێچەوانەی ئەڵقە، ئەگەر $a \times b = a \times c$ و $a \neq 0$ ، ئەوە $b = c$. بۆیە تیۆری مەیدان داناسقەترە وەک لە تیۆری ئەڵقە. ژمارە تەواوەکان،

ڕێژەییەکـــان و ژمـــارە ڕاســـتییەکان گشـــتیان دەبـــن بە مەیـــدان، وەک چـــۆن دەشـــبنە ئەڵـــقە، واتە گشـــت مەیـــدانێک دەبێـــتە ئەڵـــقە، بەڵام پـــێچەوانەکەی ڕاســـت نیـــیە. نمـــونەیەکی تـــر لە هەمـــبەر مەیـــدان، بـــریتییە لە کـــۆمەڵەی ئەو ژمارانەی کە ئەو فۆرمەیان هەیە $a + b\sqrt{2}$ کاتێ a،b ژمارەی ڕێژەین.



ئەم دوو خشـــتەیە دوو ئۆپەریشـــن-کـــردار دەنـــوێنن لە مەیـــدانێکی ســـادە و ســـاکار بـــۆ چـــوار دانە O و I،A،B کە I بـــریتییە لە دانەی بـــێ لایەن لە کـــرداری جـــاران، O بـــــریتییە لە دانەی بـــــێ لایەن لە کـــــرداری کۆکردنەوەکە.

تیۆری گالوا

Galois Theory

گالوا، شۆرشگێڕێکی فەرەنسی لە زانست ((کەسێکی بێ بڕوانامە))، یەکەم کەس بوو کە بەردی بناغەی تیۆری گرووپەکانی دانا و توێژینەوەکانی شۆڕشێکی لە جەبردا بەرپا کرد، کە بە بیردۆزی گالوا ناسراوە. بیردۆزی گالوا دەرگایەک بوو بۆ شیکارکردنی چەندین پرسی بیرکاری، یەکێک لەو ئەنجامانەی لە بیردۆزەکەی ئەو کەوتەوە، ئەوە بوو کە شیکارێکی گشتی بۆ هاوکێشەی سەروو پلە 4 بوونی نییە. گالوا کۆماریخوازێکی توندڕەو بوو، بەو هۆیەوەش ماوەیەک لە بەندیخانە بوو. [گالوا لەسەر کچێک بریندار بوو و کوژرا].

گالوا، توانی شتانێک بدۆزێتەوە، کە تا دونیای ماتماتیک ماوە ئەوە هەر باسی لێوە دەکرێت و هەر بە نەمری دەمێنێتەوە. تیۆری گالوا، بریتییە لە تیۆرییەک کە لە نێوان تیۆری گرووپ وتیۆری مەیدان (مەیدان) پەیوەندییەک دروست دەکات، هەروەها پێکەوە بەستانی تیۆری گرووپ و شیکاری زۆر ڕادەدارەکان. بەهۆی تیۆری گالواوە دەتواندرێت هەندێ لە کێشەکانی تیۆری فیلد لە تیۆری گرووپ قسەی لێوەبکەین و باشتر لێی تێبگەین، واتە پوختکردنەوەی کێشەکان لە تیۆری مەیدان بۆ تیۆری گرووپ، واتە لە ڕێگەی ئەم تیۆرییەوە قسە لەسەر فلید دەکەین بەهۆی تیۆری گرووپ لە ژێر هەندێک مەرج. شیکاری گشتی بۆ ڕادەدارەکانی پلە: 2 و 3، لە کۆتاییەکانی سەدەی شازدەم دۆزرانەوە، بەلام بۆ پلەی

بەرزتر، نەتواندرا شیکارێکی گشتیان بۆ بدۆزرێتەوە. گالوا توانی پیشانی بدات کە تیۆری گرووپ دەتوانێت ئەوە دەربخات کە کەی ڕادەدارێک شێوەیەکی گشتی بۆ شیکارەکەی هەیە، واتە فۆرمێکی داخراو کە لە چەند کردارێکی جەبری پێک دێت. بۆیەش ئەو ڕاستییەی دۆزییەوە کە هەبوونی فۆرمی شیکارە داخراوەکانی هاوکێشەکان پەیوەندی هەیە بە سیفەتی ئالوگۆڕی گرووپەکە. تەنیا چوار گرووپی سەرەتا کە توانای شیکارکردنیان هەیە؛ گالوا بونیادی نان هەر چواریان سیفەتی ئالوگۆڕییان هەبوو. هەمووی ئەوەی ئیستا دەیزانین، ڕادەدارەکان تەنیا تا پلەی چوار دەتواندرێت شیکاربکرێت و شیکارەکەی بدۆزرێتەوە بە شێوەیەکی گشتی لە چەند ڕادەیەکی جەبری سادە و نەخشەی جەبری. هەر لە ڕێگەی تیۆری گالواوە، ئەوە ڕوون بۆوە کە هەندێ کێشە ناتواندرێت شیکاربکرێن، بۆ نموونە: دوو هێندەکردنی شەش پالو، دووجارکردنی بازنە...



تیۆری گالوا کەرەستەیەک بوو بۆ دۆزینەوەی (هەبوون یان نەبوون) شیکاری گشتی ڕادەدارەکان، وەک ڕادەداری پلە 6 کە لەسەرەوە نیشاندراوە، کە دۆزینەوەی شیکارەکەی مەحاڵە.

تیۆری بەرق

Moonshine theory

لە بیرکاریـــــدا، تیـــۆری بەرق[84] دەرخســـتی پەیوەنـــدییەکە لە دوو دەڤەری جیـــاواز لە پانتـــایی بیرکـــاری، ئەوانـــیش گرووپـــی شـــەولەبان (Monster group) و جۆرێـــک لە نەخشـــەی شـــیکارەیی-ئەنەلاتیـــک (Modular functions) لە ژمـــــــارە ئالۆزەکـــــــان، کە لە لایەن دوو بیرکـــاریزانی بەریتـــانی (Simon Norton - John Conway) پێشـــنیارکرا بـــوو، کە پـــاش ئەوەی (John Kay) لە ســـیمنارێک گونجانـدنێکی نـاوازەی بـاس کـرد لە سـالی 1978. کەی (Kay) سـەرنجی دا کە کـۆلکەیەک لە فراوانبـوونی نەخشـەکان پێناسـەکراوە لە تیـۆری ژمارەکـان لە لایەن (Felix Klein) کە کـۆلکەکەی بریتبـوو لە 196،884، کە ئەمەش تەنیـا لە یەک شـمارە-رەنـووس لەگەڵ قەبـارەی گرووپـی شـەولەبان جیـاوازە لە فۆرمی ڕیزکراوەدا.

دواتـــر پرســـیارێک هـــاتە ئـــاراوە، کەبـــۆچی ئەم دوو پانتـــاییە، ئەم تیـــۆرییە ســـەرئاو دەخەن؟ بـــۆ وەڵامـــی ئەو پرســـیارە، ڕیچـــارد بۆرچیـــدس (Richard Borcherds) لە ســـالی 1992 پیشـــانی دا، کە پەیوەنـــدییە

[84] 'بەرق' واتە گـورزەی ڕوونـاکی مانـگ. وەک محـوی شـاعیر لە شـعرێک دەڵێـت: ئەگەر کەسێ شێتانە بەردم تێگرێت، ئەوە من بەرقی تێدەگرم.

قولەکەی نێوان ئەم دوانە چییە ، بەم کارەشی خەڵاتی فیلدزی[85] بیرکاری وەرگرت. لەگەڵ ئەمەش، چەندین زانیاری لە هەمبەر ئەم پەیوەندییە لە نێوان، تیۆری کوانتەم، جەبر، تۆپۆلۆجی-شوێنناسی و تیۆری ژمارەکان بە نەزانراوی ماوەتەوە، واتە تا هەنووکە لێیان تێنەگەیشتووینە.

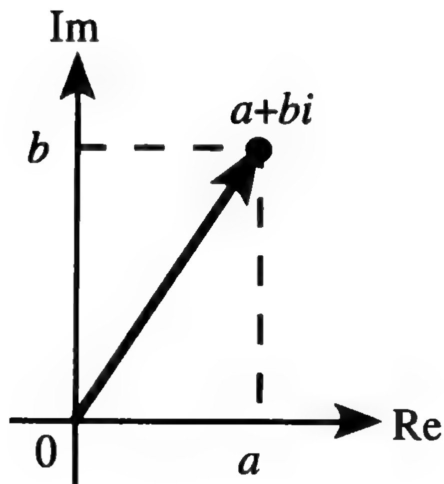


85 خەڵاتی فیلدز خەڵاتێکە تایبەتە بە بیرکاری، کە هاوتای نۆبلە. بیرکاریزانی کورد (کۆچەر بیرکار) کە براوەی ئەو خەڵاتەیە.

بەشی نۆیەم

ژمارە ئاڵۆزەکان-ئاوێتەکان

Complex numbers



ژمارە ئاوێتەکان

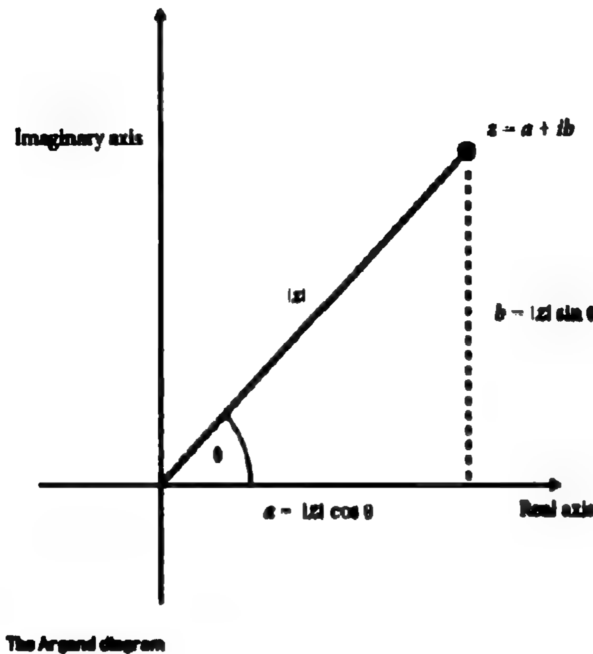
Complex numbers

دەتوانین بڵێین: ژمارە ڕاستییەکان؛ ئەوانیش هەر ژمارە ئاوێتەکانن، لەبەرئەوەی هەموو ژمارەیەکی ڕاستی دەکرێت بە شێوەی ژمارە ئاوێتەکان لێی بنۆڕین، ئەویش کاتێک بەشە خەیاڵییەکەی سفرە. لە بابەتەکانی ڕابردوو باسی ئەوەمان کرد کە ئەو هۆکارە چی بوو کە وای کرد ژمارە خەیاڵییەکان پەیدا بن، ئەویش: ئایا شیکاری هاوکێشەی لەم شێوەیە: $x^2 + 1 = 0$ چییە؟ هەر ژمارەیەکی ئاوێتە z دەتواندرێت لەسەرە شێوەی $a + ib$ بنووسرێت، کاتێک a و b دوو ژمارەی ڕاستین و، i بریتییە لە ڕەگی دووجای: -1، واتە $i^2 = -1$. وتمان b و a دوو ژمارەی ڕاستین، بە a دەوترێت بەشی ڕاستی z (Real part) ، وە بە b دەوترێت بەشە خەیاڵییەکەی z (Imaginary part).

ئەگەر بیر لە پێکهاتەی ژمارەی ئاوێتەکان (a,b) بکەینەوە وەک دوو ژمارەی ڕاستی لە پۆتانی دیکارتی، ئەوە دەتوانین ئەندازەیەک بۆ ژمارە ئاڵۆزەکان بدۆزینەوە، وەک لە وێنەکەدا دیارە. ئەم وێنەیە ناسراوە بە وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئارگانت (Argant). هەر خاڵێک لە ڕووتەختەکەدا، واتە هەر ژمارەیەکی ئاوێتە لە ڕووتەختدا-ڕووتەختی ئاوێتە (Complex plane)، دوورییەکی هەیە لە خاڵی بنەڕەت، کە پێی دەوترێت بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتەی z (Absolute value) کە بە |z| هێما دەکرێت. بە پشت بەستن بە بیردۆزی فیساگۆرس، دەتواندرێت

$|z|$ بە پێــــی دوو پێکهێنـــــەرەکەی (Components) بنووســــــرێت واتە: $|z|^2 = a^2 + b^2$ هەروەهـــا هەر ژمـــارەیەکی ئـــاوێتە گۆشـــەیەکی هەیە، کە پەیوەنـــدی بە تەوەری X ەوە هەیە، کە پێـــی دەوترێـــت جەمســـەری ژمـــارەی ئـــاوێتە (Argument of complex number). بەم هـۆیەوە دەتـوانین ژمـــارە ئاوێتەکـــان لە پـــێکەوە بەســـتانی گۆشـــەکەی و مەوداکەی بنووســـین، ئەویش بەهۆی:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$



The Argand diagram

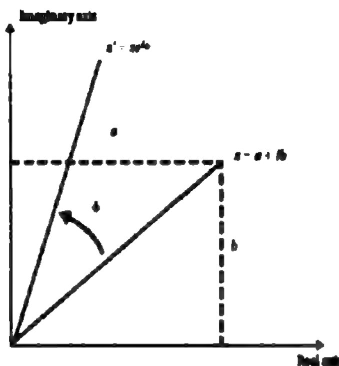
ئەندازەی ژمارە ئاوێتەکان

Geometry of complex numbers

له بـابەتی پێشـتوو تـر باسـی ڕووتەختـی دیکاریتیمـان کـرد، هەروەهـا باسـی ژمـارە ئاوێتەکانمـان کـرد. ئەوەی مـاوە، ئەوەیە ئەنـدازەی ژمـارە ئاوێتەکـان چـۆنە و لەکـوێ دەکرێـت پیشـانبدرێت؟ له ڕاسـتیدا ئەو ڕووتەخـتەی پێشـتر خوێنـدوومانە، کە تێـدا مەبەسـتمان ڕووتەختـی دیکـارتییە، هەر هەمـان ڕووتەخـت بـۆ ژمـارە ئاڵۆزەکـان بەکاردێـت، تەنیـا ئەوە نەبێـت کە تەوەرەی x دەبێـتە بەشـی ڕاسـتی ژمـارەکە، تەوەرەی y دەبێـتە بەشـی خەیـاڵی ژمـارەکە. له ڕووتەختـی ژمـارە ئاوێتەکـان (Complex plane) دوو شـت بە زەقـی جیـادەکرێتەوە کـاتێ ژمـارە ئاوێتەکـان دەخـوێنین، ئەویـش ئـاوەڵی ژمـارە ئاوێتەکـان (Conjugate number) و لاسـەنگەی سێگۆشـەیی (Triangle inequality). وا دانـێ کە: $z = a + ib$ هەر ژمـارەیەکی ئـاوێتە بێـت، ئەوە ئـاوەڵی (Conjugate) ئەو ژمـارەیە بە $\bar{z}$ یان z^* هێمـا دەکرێـت و بـریتییە له: $a - ib$ ، واتە ئەگەر $\bar{z}$ و z لەسـەرە ڕووتەختـی ژمـارە ئاڵۆزەکـان بنـوێنین، ئەوە $\bar{z}$ دەبێـتە وێـنەدانەوەی z بە دەوری تەوەرەی ژمـارە ڕاسـتییەکان. له ڕێـگەی چەنـد هەنگاوێـک و هەژمارکردنێـک دەبنـین کە $|z|^2 = zz^*$. هەروەهـا دەکرێـت هەر یەک له بەشـە ڕاسـتی و خەیـاڵییەکەی ژمـارەیەکی ئـاوێتە بە جیـا بنووسـرێت، $b = \frac{(z-z^*)}{2i}$ ، $a = \frac{z+z^*}{2}$ کە ئەمـانەش کارئاسـانیمان بـۆ دەکەن له مەڕ خوێنـدن و لێکـۆلینەوە سـەبارەت

بە ژمـــارە ئاڵۆزەکـــان و داتاشـــینی بیردۆزەکـــان[86]. لاســـەنگەی سێگۆشـــەیی (Triangle inequality) بـــریتییە لە لاســـەنگەیەکی بیرکارییـــانە لە نێـــوان لایە درێـــژەکەی سێگۆشـــەیەک و لایەکـــانی تـــر، کە بەســـتانەوەیان بەهـــۆی ئامرازەکـــانی بەراوردکردنـــی ژمارەکـــان. دەقـــی لاســـەنگەکە ئەوەیە: لایە درێـــژەکەی سێگۆشـــەیەک، بچـــوکتر یـــان یەکســـان دەبێـــت بە کـــۆی دوولایەکەی تـــری. بـــۆیە کـــۆی دوو ژمـــارەی ئـــاوێتە بە ئەنـــدازەییانە وەک کـــۆی دووی ئاراســـتەبڕ وایە، لەکاتێـــک بەشـــەکانی ژمـــارە ئـــاوێتەکە بـــریتییە لە بەشـــە خەیـــاڵییەکەی و بەشـــە ڕاســـتییەکەی. بـــۆیە ئەگەر بێـــت دوو ژمـــارەی ئاوێتەمان هەبێت Z، W ، ئەوا:

$$|z + w| \leq |z| + |w| .$$



[86] لە قۆنـــاغی چـــواری زانکـــۆ، لە وانەی شـــیکردنەوەی ئـــاوێتە (Complex analysis)، لە تـــاقیکردنەوە پرســـیارێکم شـــیکارکرد بەهـــۆی بەکارهێنـــانی ئەو دوو دەرهاوێشـــتەی ژمـــارە ئاوێتەکـــان، بەم هـــۆیە بەڕێـــز (د. فریـــاد حوســـێن) خۆشـــحاڵی خـــۆی دەربـــڕی بـــۆ شـــیکارەکەم، کە وەک هاندانێک بوو تا زیاتر هەوڵ بدەم، لێرەوە سوپاسی دەکەم.

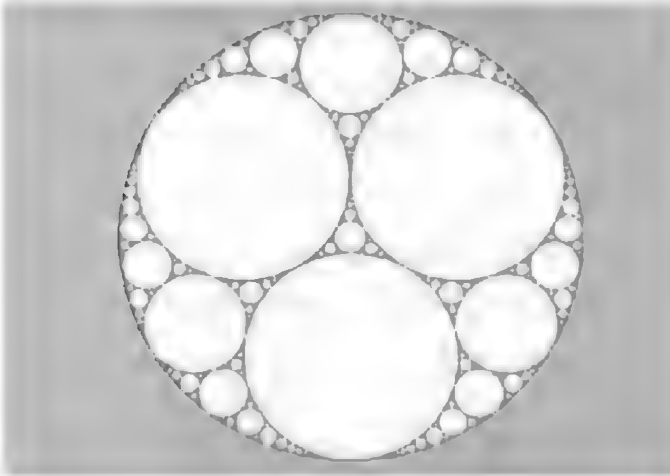
جێگۆڕکێی مۆبیوس

Möbius transformation

جێگۆڕکێی مۆبیوس[87] بریتییە لە نەخشەیەکی ڕێژەیی لە ڕووتەختی ژمارە ئاوێتەکان کە تێیدا؛ ڕاستەهێڵ شێوەگۆڕکێی پێ دەکرێت بۆ بازنە، یان بازنە شێوە گۆڕکێی پێدەکرێت بۆ ڕاستەهێڵ، یانیش ڕاستەهێڵ هەر بۆ ڕاستەهێڵ و بازنە هەر بۆ بازنە بەڵام بەگۆڕانکاری، کە ئەویش لە ڕێگەی ئەو فۆڕمەیە: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ کاتێک $ad - bc \neq 0$ ، و $a،b،c$ &d گشتیان ژمارەی ئاوێتەن و z بریتییە لە گۆڕاوێکی ئاوێتە (Complex variable). جێگۆڕکێ یان شێوەگۆڕکێی مۆبیۆس، لە فیزیا گرنگییەکی زۆری هەیە ، هەندێ پرس هەن چارەسەرکردنیان زەحمەتە لەو ئاهووتەیەکەی کە تێیدایە، بۆیە لە ڕێگەی شێوەگۆڕکێی مۆبیۆس کێشەکە سادەتر دەردەکەوێت و چارەسەرکردنی ئاسانترە، دوای ئەوەی کە چارەسەرکرا، ئەوە دەگەڕێندرێتەوە بۆ شێوە ڕەسەنەکەی خۆی. بۆ نمونە ئەگەر قوماشێکی 10 مەتری بتەوێت بیکەیتە دوو پارچە، ئەوە قوماشەکە دەنووشتێنینەوە بۆ سەر یەکتر دەبێتە 5 مەتر، پاشان دەیکەینە دوو

[87] مۆبیوس، بریتییە لەو ئەندازەیەی یان ئەو شێوە ئەندازەیەی کە تەنیا یەک ڕووی هەیە. وەک لی سیمۆلین لە چاوپێکەوتنێکدا دەڵێت: گەردوون تەنێکی شێوە مەحاڵە. ناوەوەی هەیە بەڵام دەرەوەی نییە، دراوێکی تاک ڕوویە. ئەم تەلارسازییە مۆبیوسە ئاڵەنگارییەکی تاقانە دەخاتە بەردەم گەردووناسان، ئەوانەی کە خۆیان لە پێگەیەکی نابەجێدا دەدۆزنەوە؛ گیربوون لەناو ئەو سیستەمەدا کە هەوڵی لێ تێگەیشتنی دەدەن. (پەیجی فیزیک بۆ کورد).

پـــارچە، کە کردمـــانە دوو پـــارچە، قوماشـــەکە هەڵـــدەدەینەوە، شـــێوەگۆڕکێش بیـــرۆکەکەی بەم شـــێوەیەیە. هەنـــدێک کـــۆمەڵەی ڕێزکـــراوی ئـــاوێتە 2 × 2 دەتوانـــدرێت بەهـــۆی جێگـــۆڕکێی مۆبیۆســـەوە شـــتی جـــوان و ســـەرنج ڕاکێشـــی لێـــوە بەدەســـــتبهێندرێت، وەک ئەو وێـــنەی لە خـــوارەوە پیشـــــاندراوە کە فراکتـــاڵێکە- لەیەکبـــوو[88] پێـــی دەڵـــێن: Apollonian gasket. چـــۆنییەتی دروســـتکردنی لە ڕێـــگەی جێگـــۆڕکێی-شـــێوەگۆڕکێی مۆبیوســـەوە دروســـت دەبێـــت، ئەویـــش لە ســـەرەتا لە ســـێ بـــازنە هاوچەشـــن-یەکســـان دەســـت پـــێ دەکـــات، دواتـــر هەرچیـی کەلـێن هەیە، بە بـازنەی بچکتـر پڕدەکـرێتەوە، تـا ئەو شێوەیە وەردەگرێت.



[88] لەیەکبووەکـــــــان (Fractal) پێکهـــــاتەیەکی ئەنـــــدازەییە، کە لە گەورەکـــــردنەوە و دووبـــارەکردنەوەی شـــێوە ئەنـــدازەییەکانی لێکچـــووی شـــێوە بنەڕەتیـــیەکە پەیـــدا دەبێـــت. بە دەســـتەواژەیەکی تـــر فراکتـــاڵ بە پێکهـــاتەیەک دەوترێـــت کە هەر بەشـــێکی هاوشـــێوەی شـــێوە گشـتییەکەیە. فراکتـاڵ لە دوور و لە نـزیکەوە یەکسـان دەبینرێـت، بەم تایبەتمەنـدییەی فراکتـاڵ دەڵێن لەخۆچوویی (self-similar).

زنجیرەی توانی ئاوێتە

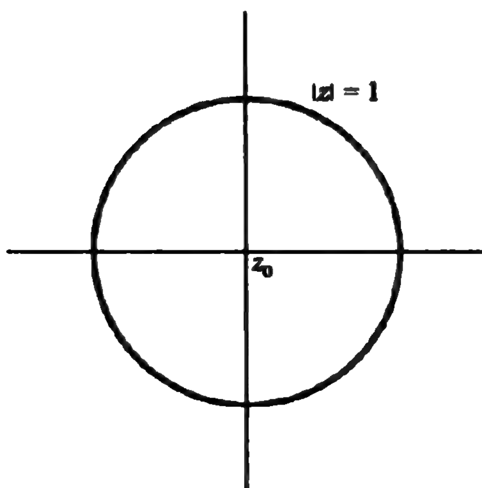
Complex power series

زنجیــرەی ئــاوێتەیی یــان زنجیــرەی تــایلەری ئــاوێتە، بــریتییە لە زنجیرەیەکی ناکۆتا لە ڕادە لەسەر شێوەی:

$$a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$$

کاتێــک کۆلکەکــانی a_k گشــتیان ژمــارەی ئــاوێتەن. بە شــێوەیەکی گشــتی دەتوانــدرێت لە شــوێنی z دا، $(z - zo)$ دابنــێن بە پێــی ژمــارەیەکی دیــارکراوz_0 لە ژمــارە ئاوێتەکــان. زنجیــرە توانییەکــان لە چــارچێوەی ژمــارە ڕاســتییەکان بــابەتی نزیکبــووە یــان دووکەوتــووە چەقــی بــابەتەکەبوو. یەکێــک لە ڕێگاکــان بــۆ ڕۆنــانی نزکیبــوونەوەیی، بــریتییە لە بەراوردکــاری لە مەودای هەر ڕادەیەکــــــــــــــــــــــی $|a_0| + |a_1z| + |a_2z^2| + \cdots$ لەگەڵە زنجیــــــرەی ئەنــــــدازەیی $1 + r + r^2 + r^3 \ldots$ بەو شــــــێوەیە. ئەگەر بێــت و ئەو زنجیــرەیە لێکنزیکبــووە بێــت بــۆ هەر نرخێکــی Z، ئەوە نەخشــەیەک لە ڕێــگەی ئەو زنجیــرەوە بنایــاد دەنــدرێت و پێــی دەڵێــت بەحــاڵ (بەجــێ-Entire). نەخەشــەی بەجــێ، بــریتییە لەو نەخشــەیەی کە ڕادەدارێــکە لە گــۆڕاوی ئــاوێتە و، نەخشــەی تــوانی لە گــۆڕاوی ئــاوێتە لەخۆدەگرێــت. ئەگەر بێــت و زنجیــرە تــوانییەکە لێکنزیکبــووە بێــت بــۆ نرخێــک، کاتێــک Z لە z_0 نزیــــک دەکەویــــنەوە، ئەوە نیــــوەتیرەی لێکنزیکبــــووەکە بە گــــوێرەی زنجیــــرەکە دەکــــاتە گەورەتــــرین r بەو مەرجەی کە زنجیــــرەکە لێکنزیکبــــووە

بێت بۆ هەموو zێک لە ناوەوەی بازنەیەک کە نیوەتیرەکەی ۲ و چەقەکەشی بریتی بێت لەz_0 .



مەودای زنجیرەیەکی توانی ئالۆز، کە لێکدوورکەوتنەوە پیشان دەدات لە هەندێ خاڵدا و نیوەتیرەی لێکنزیکبووە لە دەوروبەری خالێکی دراو کە بریتییە لە: z_0 .

توانییە ئاوێتەکان

Complex exponentials

لە بابەتەکانی ڕابردوو باسی نەخشەی توانیمان کرد لەسەر ژمارە ڕاستییەکان، بەهەمان شێوە دەتوانین قسە لەسەر نەخشە توانییەکان بکەین لەهەمبەر توانی ژمارە ئالۆزەکان کاتێک بنچینەی نەخشەیەک ژمارەیە.

ئەگەر بێت و $z = x + iy$ ئەوە دەتوانین توانەکە بگۆڕین بۆ ژمارەیەکی ئاوێتە، واتە e^{x+iy} . وەک دەزانین بە e دەوترێت ژمارەی ئۆیلەر. ئێمە لێرە دەتوانین بەشە ڕاستییەکە و بەشە خەیاڵییەکەی ژمارە ئاوێتەکە جیابکەینەوە و بە جیا بیانووسین، کە بە e^x دەوترێت توانی بەشی ڕاستی هەر ئەوەی لە ژمارە ڕاستییەکان هەمان بوو، بە e^{iy} دەوترێت بەشی توانی خەیاڵی. هەر ئەم جیاکردنەوەیە دەمانبات بۆ شتێکی تر، ئەویش ئەوەیە کەی بەشە خەیاڵییەکە ،دەتواندرێت بەهۆی زنجیرەوە بنووسرێت، هەر بۆیە ئەوەی دەستمان دەکەوێت ئەوەیە: $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ ، لەو هاوکێشەیە بۆمان دەردەکەوێت کە نەخشە سێگۆشەییەکان تەنیا پەیوەندی بە ئەندازە و ژمارە ڕاستییەکان نییە، بەڵکو ئەوەتە ئەو نەخشانە دێنە ناو ژمارە ئاوێتەکان و بەشداری گرنگ دەکەن لە داتاشینی یاساکان.

نەخشــە توانییەکــان پێشــتر باســی بەکارهێنانیمــان کــردووە، بەڵام لە مەڕ ژمــارە ئاڵۆزەکــان دیســانەوە گرنگــی و بەکارهێنــانی زۆری هەیە لە بــواری ئەنــدازیاری و فیزیــا... بــۆ نمــونە لە فیزیــا بەکاردێهێنــدرێت بــۆ وەســفی ئەگەری ڕووداوێــک لە کــوانتەم میکانیــک. پەیوەنــدی نێــوان نەخشــەی تــوانی ئــــاڵۆز و لەگەڵ نەخشــــە سێگۆشــــەییەکانی وەک ســـــاین و کۆســــــاین، دەمــانگەیەنێتە هاوکێشــەکی زۆر جــوان کە پێــی دەڵــێن هاوکێشــەی ئــۆیلەر یــــان هاوئەنجــامی ئــۆیلەر، کە هاوکێشــەکەش بــــریتییە لە: $e^{i\pi} + 1 = 0$ ، **لەبەر ئەوەی 5 هەرە گرنگتــرین زارشــتەکانی ماتمــاتیکی تێــدا کۆبــۆتەوە، ئەوانــیش: 1 کە دانەی بــێ لایەن لە کــرداری جــارانکردن. 0: دانەی بــێ لایەن لە کرداری کــۆکردنەوە. θ: نەگــۆڕی ئــۆیلەر. i: ژمــارەی خەیــاڵی و نەگــۆڕی π** . ئەو نەخشــەیە کاتێــک دروســت دەبێــت کە $y = \pi$، چونــکە $\sin \pi = 0$ ، $\cos \pi = -1$ واتە: $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$، لەمەوەش دەگەینە:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

یەکێکــی تــر لەو دەرئەنجــامە هاوشــێوانەی دەســتمان کەوتــووە ئەوەیە: لەبەر ئەوەی دەتــــوانین $z = x + iy$ بەهــــۆی مەوداوە بنووســــین: $|z| = r$ کاتێــــک r بــــریتییە لە مەودای ژمــــارە ئــــاوێتەکە، وە گۆشــــەکەمان θ، ئەوە واتـــــــــــە $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، لەمەوەش دەگەیـــــــنەوە ئەوەی کە ژمارە ئاوێتەکان دەتوانین بەو شێوەیەش بنووسین $z = r\, e^{i\theta}$.

نەخشە ئاوێتەکان

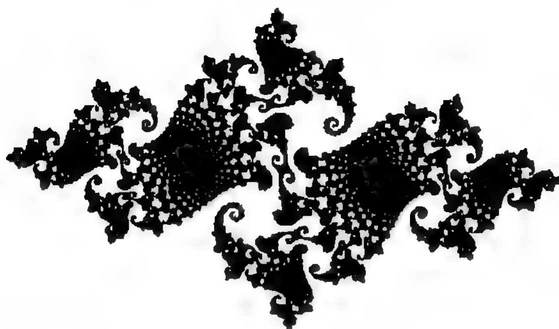
Complex functions

نەخشـــە ئاوێتەکـــان $f(z)$ هەر نەخشـــەیە، بەڵام لە ژمـــارە ئاوێتەکـــان، واتە بـــوارەکەی بـــڕیتییە لە ژمـــارە ئاوێتەکـــان کاتێـــک $z = x + iy$ لەبەر ئەوەی نەخشـــەکە دەبێـــتە نەخشـــەیەکی ئـــاوێتە، وە ژمـــارە ئاوێتەکـــان بەشـــی ڕاسـتی و بەشـــی خەیالیـان هەیە، کەواتە نەخشـــەکەش بەهەمـــان شـێوە بەشـــی ڕاستی و بەشی خەیاڵی دەبێت وە بەم شێوە دەنووسرێت:

$$f(z) = u + iv$$

دیـــارە کە u بـــڕیتییە لە بەشـــە ڕاســـتییەکە و v بـــڕیتییە لە بەشـــە خەیـــاڵییەکە. لە ڕاســـتیدا تیـــۆری نەخشـــە ئاڵۆزەکـــان سەرســـوڕهێنەرە، لە بونیاتنـــانی هەمـــوو ئەنجامێـــک کە تایبەتمەنـــدە بە جیهـــانی شـــیکردنەوەی ئـــاوێتە. ئەمەش لەبەر ئەوەیە کە نەخشـــــە لە ژمـــــارە ئاڵۆزەکـــــان z زۆر ســـنوردارە، کە نەخشـــەکە پێوســـتە بەدەر لە بەکارهێنـــانی ئـــاوەڵی ژمـــارەکە بنووســـرێت z^* ، بـــۆیە بەشـــە ڕاســـتییەکەی نەخشـــە ئاڵۆزەکـــان بەشـــێک نیـــیە لە نەخشـــە ئـــاڵۆزەکە. ئەوەی پێوســـتە بیـــزانین، ئەوەیە کە هەر ژمـــارەیەکی ئـــاوێتە بـــۆ پیشـــاندانیان بە شـــێوەی ئەنـــدازەیی، پێوســـتی بە ڕووتەخـــتە (لە بـــابەتی پێشـــتر باســـمانکرد)، واتە ژمـــارە ئاوێتەکـــان لە ئـــاهووتەی دووڕەهەنـــدی پیشـــاندەدرێت، لەکاتێـــک گشـــت ژمـــارە ڕاســـتییەکان تەنیـــا لەســـەر هێڵێـــک واتە ئـــاهوتەیەکی یەک ڕەهەنـــدی وێنـــادەکرێن. نەخشـــە لە

ژمـــارە راســـتییەکان مەودایەکەی دیســـانەوە ژمـــارەیەکی راســـتی بـــوو، بەڵام لێـــرە نەخشـــە لە ژمـــارە ئاوێتەکـــان جـــگە لەوەی بـــوارەکەی لە ئـــاهووتەی دوو ڕەهەنـــدی وێنـــا دەکرێـــت، ئەوە مەوداکەی وا بە ئاســـانی وێـــنە ناکرێـــت، چـــونکە بەشـــێکی خەیـــاڵی هەیە کە پێوســـتی بە ئـــاهووتەیەکی دوو ڕەهەنـــدی هەیە، وە بەشـــــە راســـــتییەکەی ئەویـــــش پێوســـــتی بە ئـــــاهووتەیەکی دوورەهەنـــدی هەیە! یەکێـــک لەو پێکهـــاتە هەرە جوانـــانەی بەهـــۆی نەخشـــە ئاوێتەکـــــان دروســـــتکراوە: $c + z^2$ کە لە وێـــــنەکە نیشـــــاندراوە، کە خشـــــەتەیەک لە ژمـــــارە پیشـــــاندەدات کە ژمارەکـــانیش دواهـــاتوونە، ئەوە بەو شێوەیە دەوترێن کۆمەڵەی جولیا یان ژولیا-Julia set .



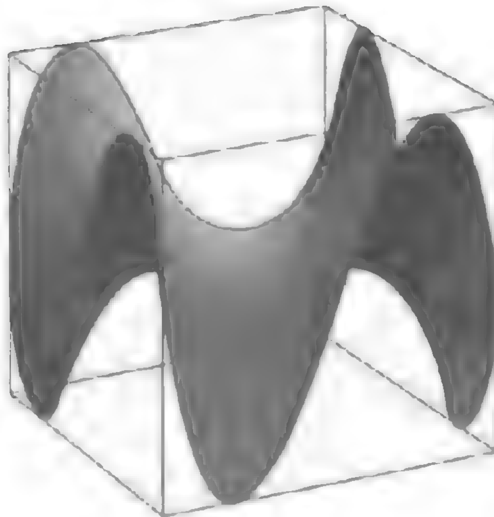
جیاکاریی ئاوێتە

Complex differentiation

لە بابەتی نەخشە لە ژمارە ڕاستییەکان باسی چۆنییەتی دۆزینەوەی داتاشراوەی نەخشەمان کرد، ئێستا کە نەخشەمان هەیە لە ژمارە ئاوێتەکان، بەهەمان شێوە داتاشراوەمان بۆ ئەوانیش هەیە، چۆنییەتی دۆزینەوەی داتاشراوەی نەخشە ئاوێتەکان هەر بە هەمان شێوازی دۆزینەوەی داتاشراوەیە لە نەخشە لە ژمارە ڕاستییەکان. بەڵام لەبەر ئەوەی وتمان بواری نەخشە ئاوێتەکان ئاهووتەیەکی دوو ڕەهەندییە، ئەوە جێبەجێکردنی پێناسەی داتاشراوە تۆزێک گۆڕانکاری بەسەر دێت، هەر بۆیە لەمەڕ ئەم پرسە چەند بیردۆزێک هەن کە ئاسانکاریمان بۆ دەکەن کە ئایا نەخشەیەکی ئاوێتە کەی جیاکاری لەسەر دەکرێت، ئەویش بەهۆی بیردۆزی **کۆشی-ڕیمان** (Cauchy-Riemann). واتە ئەگەر بێت و نەخشەیەک توانای داتاشراوەی هەبێت، ئەوە ئەگەر و تەنیا ئەگەر یاسای کۆشی-ڕیمان جێبەجێ بکات. بۆ نموونە ئەگەر $z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$ ئەوە دەبێت $\frac{\sigma u}{\sigma y} = -\frac{\sigma v}{\sigma x}$ و $\frac{\sigma u}{\sigma x} = \frac{\sigma v}{\sigma y}$ بێتە دی. لەمەوەش دەگەینە ئەوەی کە U و V دوو نەخشەی هارمۆنین کە ئەمە جی بەجێ دەکەن:

$$\frac{\sigma^2 u}{\sigma x^2} + \frac{\sigma^2 v}{\sigma y^2} = 0$$

ئەمەش هاوکێشـــەی لاپلاســـە کە خــۆی لە زۆر هاوکێشـــەی فیزیـــای بیرکارییـــانە دەبینێـــتەوە. بـــۆ نمـــونە ئەگەر $f(z) = z^2$ ، ئەوە داتاشـــراوەی ئەو نەخشـــە ئـــالۆزە دەکـــاتە $f'(z) = 2z$. هەڵـــبەتە ئەم بیـــردۆز، لە پێناسە سەرەکییەکەی سەر ئاوکەتووە.

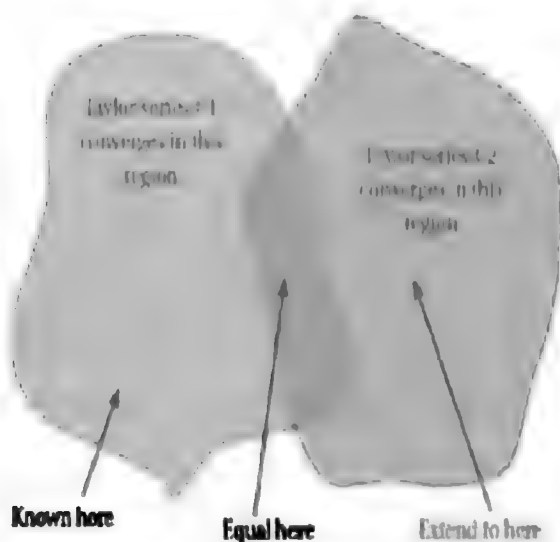


نەخشەی شیکاریی

Analytic function

نەخشـــەی ســـەلیقەدار-شـــیکاریی، بـــریتییە لەو نەخشـــە ئـــاویتەی کە توانـــای داتاشـــراوی هەیە (چـــونکە لە هەمـــوو خاڵێـــک و لە هەمـــوو ئاییەرهودێـــک-دەوروبەری خاڵەکـــان بەردەوامە و کێشـــەی نیـــیە)، بـــۆ ئەوەشـی کە لە هەمـوو خاڵێـک داتاشـراوەکەی بـوونی هەبێـت، ئەوە پێوسـتە نەخشـــە ئـــاویتەکە پاســـەدانی هاوکێشـــەی لاپـــلاس بکـــات، وە نەخشـــەکەش دەبێـت پتـر لە داتاشـراوێکی بـوونی هەبێـت، واتە تەنیـا داتاشـراوەی یەکەم کـافی نیـیە. بەڵام لە راسـتیدا لە نەخشـە ئاوێتەکـان ئەگەر هـاتوو نەخشـەیەک داتاشراوی یەکەمی هەبوو، ئەوە مەرج نییە داتاشراوە دووەمی هەبێت.

ئێســـتا وا دانـــێ دوو نەخشـــەی ئاوێتەمـــان هەیە، ئەوانـــیش f و g کە دوو نەخشـــەی ئـــاوێتەی شـــیکارین، هەریەکەیـــان لە زنجیرەیـــی تـــایلەر لێکترێکبـــونەوەن لە نـــاوچەیەک لە رووتەختـــی ژمـــارە ئاوێتەکـــان ، ئەگەر بێـت و ناوچەکـان تـێکەڵ بەیەکـبن و $f(z) = g(z)$ لە نـاو ئەو نـاوچەیەی کە تێکەڵـــــی یەک بـــــوونە، ئەوەی دێـــــت $f(z) = g(z)$ رووودەدات لە هەرشـــوێنێکی تـــر. ئەم تەکنـــیکەی بەردەوامـــی شـــیکاریی؛ بەکاردێـــت لە شیکردنەوەی نەخشەی زێتای ریمان (Riemann zeta function).



بەردەوامبوونی شیکاریی: ئەم وێنەی سەرەوە دوو هەرێم-ناوچەی پێکداچوو-تێکەڵ دەنوێنێت لە رووتەختی ژمارە ئاوێتەکان. ئەگەر بێت و زنجیرەی تایلەری نەخشەیەک لێکنزیکبووە بێت لە یەکێک لە ناوچەکان، وە زنجیرەی تایلەری نەخشەیەکی تر بە هەمان شێوە لێکنزیکبووە بێت لە ناوچەکەی تر، بەڵام ئەگەر دیترا ئەو دوو نەخشەیە لە ناوچە پێکداچووە-تێکەڵەکە یەکسان بوون، ئەوە هەردوو نەخشەکە، نەخشەی تایلەر دەبن لە سەر هەمان نەخشەی شیکاریی.

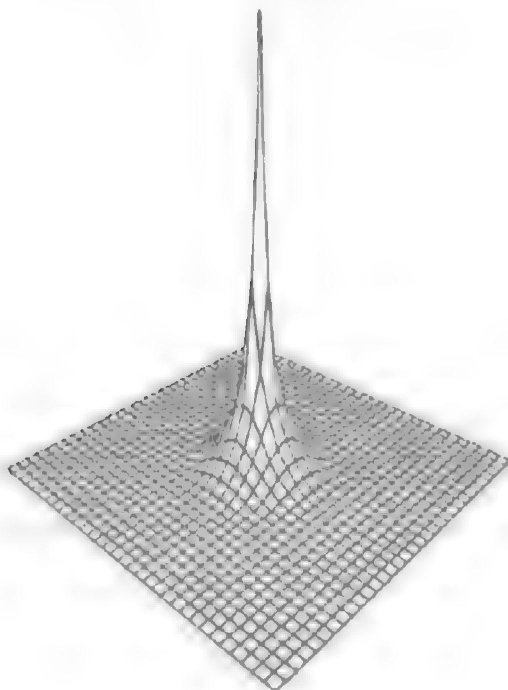
خاڵی تەرایی

Singular points

خاڵی تەرایی-تەکانە، ئەو خاڵەیە کە نەخشەیەکی ئاویتە تێدا پێناسنەکراوە. خاڵی تەرایی ئەگەر هات و لە نەخشەیەک بوونی هەبێت، ئەوە دەتواندرێت لابدرێت و کێشەکە چارەسەر بکرێت، ئەگەر هاتوو ئەو خاڵانە چارەسەر کران بەهۆی بەکارهێنان و نووسینی نەخشەکە بەهۆی زنجیرەی لورنت (Laurent expansion)، ئەوە ئەوکات نەخشە ئاویتە کێشەی تێدانامێنیت و دەبێتە نەخشەیەکی شیکاریی. زنجیرەی لورنت بەکاردێت بۆ دەربڕین و نووسینی ئەو نەخشە ئاویتانەی کە شیکارەیی (Analytic) نین، واتە ئەو نەخشە ئاویتانەی کە ناتواندێت بەهۆی زنجیرەی تایلەر بنووسرێت، جۆرێکی خاڵی تەرایی پێی دەوترێت جەمسەری (Pole) ئەگەر بێت ئەم شێوەی هەبێت $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ کاتێک $n > 0$ ، بۆیە بە شێوەیەکی بنچینەیی بۆ لەو خاڵەی کە نەخشە ئاویتەکە کێشەی هەیە، مەبەستمان جۆری Pole، ئەوە زنجیرەی لورنت لە ناکۆتا رادەی توانی نەرێنی دەگرێتەخۆی. زنجیرەی لورنتیش بۆ ئەو جۆرە خاڵە ئەوەیە:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_o)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_o} + a_1 + a_1(z-z_o)$$

به کـــورتی و پـــوختی: زنجیـــرەی لورنـــت بـــۆ ئەو نەخشـــە ئاویتـــانە بەکادرێـت کە نەخشــەیەکی شـیکارەیی نیـنە، واتە کە ناتوانــدرێن بە زنجیــرە بــاوەکەی تـایلەر بنووسـرێت، چـونکە لە خاڵێـک یـان چەنـد خاڵێـک کێشــەی تێـدەکەوێت. ئەمەش بەکاردێـت بـۆ دروسـتکردنی شـتێکی نـوێ، کە ناسـراوە بە ڕووەکانی ریمان (Riemann surface).



ڕووەکانی ڕیمان

Riemann surfaces

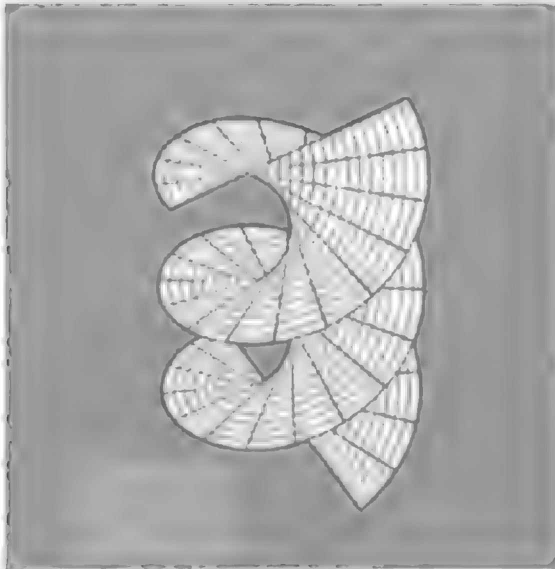
ڕووەکـــانی ڕیمـــان، ڕوویێکـــن کاتێـــک نەخشـــەیەکی فـــرە بەهـــا لە ڕووتەختـــی ئـــاوێتە دەبێـــتە نەخشـــەیەکی تـــاک بەهـــای لە ســـەر ڕووەک. واتە ئەو نەخشـــەیەی کە بـــۆ هەر خاڵێـــک لە بـــواری نەخشـــەکە، بە چەنـــد خـــاڵێکی تـــری مەودای نەخشـــەکە بەســـتراوەتەوە، لەکاتێـــک نەخشـــەی تـــاک بەهـــا بـــۆ هەر خاڵێـــک لە بـــوار، تەنیـــا بە یەک خـــاڵ بەســـتراوەتەوە لە مەودا. لۆگـــاریتمی سروشـــتی، $ln\,(z)$ ، لە ژمـــارە ئاوێتەکـــان، کاتێـــک $z = |z|e^{i\theta}$ بـــریتییە لە: $ln(|z|) + i\theta$ ، جۆرێکە لە نەخشە فرە بەهاکان:

$$ln(z) = ln(|z|) + i\theta$$

بەڵام لەبەر ئەوەی $e^{2i\pi} = 1$، بە بەکارهێنـــانی هاوئەنجـــامی ئـــۆیلەر ، ئەوە $a = |z|e^{i(\theta+2\pi)}$ ، بـــــــــــــــــــۆیە لەمەوەش دەگەیـــــــــــــــــــنە $ln(z) = ln(|z|) + i(\theta + 2\pi)$. لە ڕاســـــتیدا، $e^{2ki\pi} = 1$ بـــــۆ هەمـــــوو ژمـــــــارەیەکی تەواوی k ، بـــــۆیە $ln(z) = ln(|z|) + i(\theta + 2k\pi)$ بـــــۆ هەمـــوو ژمـــارەیەکی تەواو k ڕوودەدات، ئەوەش نەخشـــەیەکی فـــرە بەهـــای ئـــاوێتەیە (Multivalued function) . نمـــونەیەکی تـــر جیـــاواز لەمە، بریتییە لە ڕەگی دووجای z : $\sqrt{z}$

یەکێـــک لە ڕووەکـــانی ڕیمـــان کە لەم وێـــنەی خـــوارەوە نیشـــاندراوە، نەخشـــە فـــرە بەهـــایەکەی؛ لۆگـــاریتمی سروشـــتییە، کە فـــرە بەهـــا

سروشتییەکانی سەرداوەتەوە بەهۆی جیاکردنەوەی لقە جیاوازەکانی لۆگاریتمەکە. ئەگەر بێت و بە دەوری ستوونی ناوەندەکەیەوە بجوڵێن بە یەکفرە-خول، واتە 2π، ئەوە ناگەڕێنەوە هەمان شوێنی خۆمان، واتە ئەو شوێنەی لێیەوە دەستمان بە جووڵە کرد، وەک چۆن لە ڕووتەخت دەگەینەوە هەمان شوێنی خۆمان، بۆیە ئەمە وا لە لۆگاریتم دەکات ببێتە نەخشەیەکی تاک بەها لە سەر ڕووەک. تیۆرییە گشتییەکەی ڕووەکانی ڕیمان پیشانی دەدات کە چۆن نموونەی زیاتر و ئاڵۆزتر دروستدەکرێت لە سەر ڕووتەختی ژمارە ئاوێتەکان بۆ دروستکردنی نەخشە تاک بەها لێکجیاوازەکان.



نواندنی یەکێک لە ڕووەکانی ڕیمان

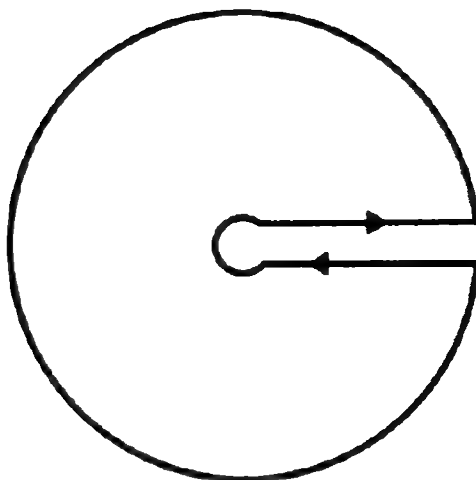
تەواوکاری ئاوێتە

Complex integration

وەک چــۆن داتاشــراوەمان هەبــوو لە مەڕ نەخشــە ئاوێتەکــان، بە هەمــان شــێوە تەواوکاریشــمان هەیە لە هەمــبەر نەخشــە ئاوێتەکــان. تەواوکــاری نەخشــە ئاوێتەکــان بە درێژایــی ڕێــڕەوی-path لە ڕووتەختــی ژمــارە ئاوێتەکــان لەگەڵ تەواوکــاری هێڵــی پێکــدەچن، بەڵام لە بــاری ئــاهووتەی دوو ڕەهەنــدی. تەواوکــاری نەخشــە ئاوێتەکــان ئەنجــامی سەرســوڕهێنەرمان دەداتــێ کاتێــک تەواوکــاری لە هەمــبەر چەمــاوەیەکی داخراو دەدۆزینەوە.

بۆ نمونە، تەواوکاری نەخشەی شیکارەیی ئاوێتەکان (Analytic function)، واتە ئەو نەخشــانەی لە هەمــوو ڕووتەختــی ژمــارە ئاوێتەکــان توانــای داتاشــراوی هەیە و بەردەوامــن، ئەوا تەواوکــارییەکەی دەکــاتە سـفر لە دەوری چەمــاوەیەکی داخــراو (بەهــۆی بیــردۆزی کۆشــییەوە). هەروەهــا دەتــوانین تەواوکــاری بــۆ ئەو نەخشــانەش بــدۆزینەوە کە بەهــۆی زنجیــرەی لورنــت نووســراون، واتە ئەو نەخشــانەی لەخالێــک یــان لە چەنــد خالێــک کێشــەیان هەیە، بــۆیە لەو زنجیــرەیە تەواوکــاری ســەرجەم بەشــە شــیکارییەکان دەکــاتە ســفر، بەڵام جــگە لەو بەشــەی کە ئەو خــاڵەی لەخۆگرتــووە کە کێشــەی بــۆ نەخشــە بنەڕەتــیەکە دروســتکردووە pole واتە Z^{-1} . بــۆ چارەســەری ئەمەش ئەوەیە کە تەواوکــاری ئەو ڕادەیە دەکــاتە $ln\ (z)$. گۆڕانکــاری لە $ln\ (z)$ بە دەوری چەمــاوەیەکی داخــراو کاتێــک

گۆشــەکە بە 2π دەجولێنــدرێت، ئەوە دەکــاتە $2\pi\, i$، بــۆیە ئەوەی دەســتمان دەکەوێــت بــریتییە لە $2\pi i\ a_{-1}$. ئەو کــۆلکەیە a_{-1} ، پێــی دەوترێــت نیشــتوو-کــتن (residue) ، بــۆیە تەواوکــاری نەخشــە ئــاوێتەکە بە دەوری چەمــاوە داخــراوەکە دەکــاتە: $2\pi\, i$ لێکــدانی کــۆی نیشــتووەکانی نەخشــەکە بەهۆی چەماوە داخراوەکە.



چەمــــاوەیەکی نمــــونەیی لە تەواوکــــاری نەخشــــە ئاوێتەکــــان لە ڕووتەختــی ژمــارە ئاوێتەکــان، بــۆ هەژمــارکردنی تەواوکــاری نەخشــەیەکی ڕاستی بەهۆی میتۆدی تەواوکاری ژمارە ئاوێتەکانەوە دەنوێنێت.

کۆمەڵەی ماندێلبرۆت

The Mandelbrot set

کــۆمەڵەی مانــدێلبرۆت[89] بــریتییە لە کــۆمەڵەیەک لە ژمــارە ئاوێتەکــان کە لە ئەنجــامی لێکــۆڵینەوەی سیســتەمە جوڵەدارەکــان (Dyanamical system) ســەرهەڵدەدات. ئەو کــۆمەڵەیەش فرکتاڵێــک پێکیــدکێنن. کــۆمەڵەی مانـــــدێلبرۆت لەگەڵ ئەوەی زۆر جــــوان و ســــەرنج ڕاکێشــــە، بەڵام پێکهــاتەیەکی زۆر قــوڵ و ئــاڵۆزی هەیە. وتمــانە ئەو کــۆمەڵەیە بــریتییە لە ژمــارە ئاڵۆزەکــان C کاتێــک لە خــاڵی بـــنەڕەت $z_0 = 0$ نەخشـــەی $z_{n+1} = C + z_n^2$ لێکــدوورکەووە نەبێــت (Diverge) کاتێــک ئەو نەخشـــەیە دووبـــارە و دووبـــارە دەکـــرێتەوە بە جێگرکردنـــی نرخێـــک $z_1 = c$ و بەگــۆڕانی z لە نەخشــەکە. ژمــارەیەکی ئــاڵۆز لە ژێــر کــۆمەڵەی مانــدێلبرۆت، زانیاریمـــان دەداتـــێ لە هەمـــبەر کــۆمەڵە جولیــاکەی. وێــنەی کــۆمەڵەی مانــدێلبرۆت کە لە خــوارەوە نیشــاندراوە، وێنەیەکــی دروســتکراوی ژمــارەییە بەهــۆی پێــدانی چەنــدین نــرخ بە C. ســنوورەکانی کــۆمەڵەی مانــدێلبرۆت، وەکـــوو چەمـــاوەیەکی داخـــراوە، کە ڕووکـــارەکەی فراکتـــاڵە. کـــۆمەڵەی مانــدێلبرۆت یەکەم جــار لەلایەن ماتماتیکزانێــک بە نــاوی "پییــر فــاتۆ" کە لە بــواری شــیکاریی ئــاوێتەدا کــاری دەکــرد لە ســاڵی 1905 پێناســە کــرا.

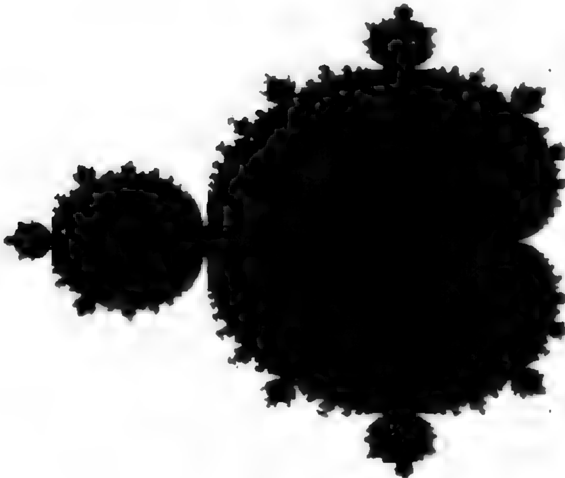
---

[89] بێنۆیــت مانــدلبرۆت (1924 – 2010) ماتماتیکناســێکی داهێــنەر بــوو کە لە کۆمپانیــای ئــای بــی ئــێم زانــا بــوو، بە بــابی جیــۆمەتری فراکتــاڵ ناســراوە. ئێســتا ئەم زانســتە ماتمــاتیکیە لە بوارەکانی ئابوری، بورسە، ئەسترۆنۆمی و کۆمپیوتەردا بەکاردێت. (شێرکۆ ڕەشید قادر).

هاوکات ماتماتیکزانیکی تر بە ناوی 'ژولیا' فانکشنە ڕیزەییەکانی لەسەر ڕووتەختی ئاوێتەدا تاوتوی دەکرد. ئەمڕوکە کۆمەڵەکانی ژولیا-جولیا لە فراکتاڵە هەرە ناسراوەکانن. ئەم تـوێژینەوانە بە شـێوەیەکی پـرش و بـڵاو لە ئارادابوون هەتا ساڵی 1979 ، کە 'بینویت ماندیلبروت' لە وتاریکدا:

(Fractals: Form, chance and dimension)

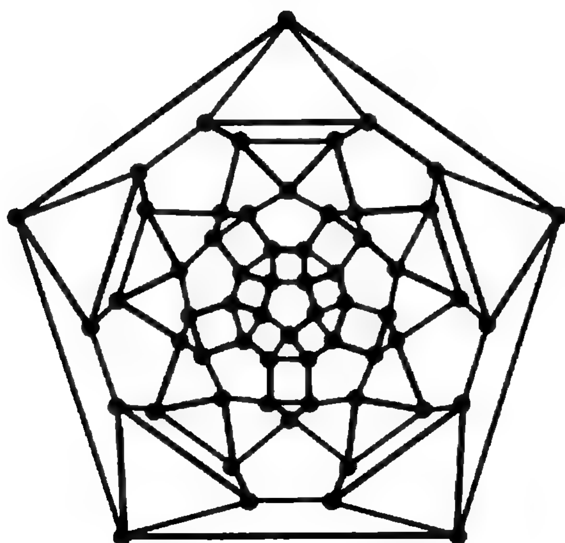
ئەم چەمکانەی لەگەڵ زۆر بابەتی تر لەژێر ناوی ئەندازەی فراکتاڵ پیشکەش کرد.



بەشی دەیەم

سازان

Combinatorics



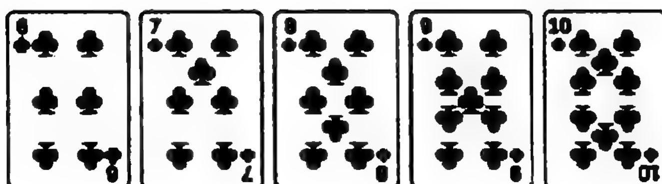
تیۆری سازان

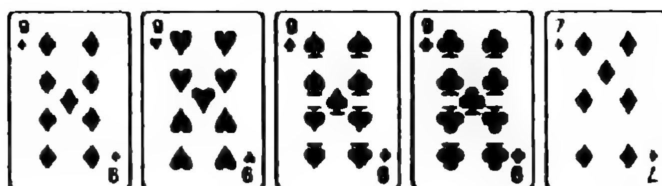
Combinatorics theory

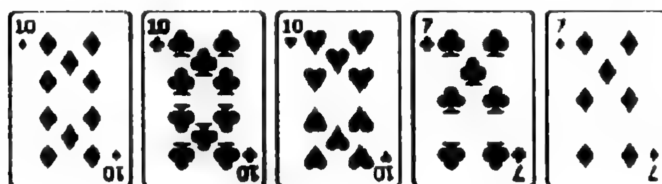
تیـۆری سـازان، یەکـێکە لە لقەکـانی بیرکـاری کە مـامەڵە لەگەڵ ژمـاردن دەکـات. وەک یاریزانەکـانی یـاری پـۆکەر، کە بە هزریـانە ئەگەرەکـان لێکـدەدەنەوە بـۆ یاریزانەکـانی بەرامبەریـان کە ئایـا دەکرێـت ئەو کـاخەزەی لە نـاو دەسـتیتی؛ چیـی بێـت. تیـۆری سـازان دەربـارەی دۆزینـەوەی ژمـارەی شـتەکانە (objects)، وە یـان ئەگەری ڕوودانـی ڕووداوێـک، بەبـێ هەبوونی خشتەی هەموو دەرئەنجامە جیاوازەکان.

سـازان بـابەتێکی گـرنگە و بگـرە بە دڵـی زۆرێـک لە بـابەتی گرنگـی وەک: تیـۆری ئەگەر، ئۆپتیمازیەشـن و تیـۆری ژمارەکـان ناسـراوە. واتە ئەمە زیـاتر وەک هونەرێـک وایە، هەروەهـا نەگـۆڕ و ژمـارەی ئـۆیلەریش دەگـرێتە خـۆی لە هەنـدێک ڕووەوە. دەسـت و پەنـجەی "کـارل گاوسـی" لەو لـقەی بیرکـاری شـوێنی هەیە، کە بەم دوایـانەش پـۆل ئێـدروارس (Paul Erdös) کاری تێدا کردووە.

لە کۆنـدا تیـۆری سـازان وەسـف دەکـرا وەک نیزامێـک بەبـێ بـوونی تیـۆرییەک، واتە تەنیـا ڕەنگـدانەوەی چەنـد تەکنیـک و میتۆدێـک بـوو، بەڵام دواتـر گـۆڕانی بەسـەرداهاتوو و پێشـکەوت ، تـا گەیشـتە ئەوەی کە ئێسـتا هەیە.







ڕێسای هێلانەی کۆتر

The pigeonhole principle

ڕێسای هێلانەی کۆتر؛ بیرۆکەیەکی سادە، بەڵام گرنگییەکی زۆر لە زۆر بواردا. وا بێنە پێش چاوت کە 101 کۆترت هەیە، ئەگەر بێت و تەنیا 100 هێلانەت هەبێت بۆ ئەوەی هەر کۆتر و لە هێلانەیەک دابنێی، ئەوە دیارە دەبێت یەکێک لەو هێلانانە دوو کۆتری تێدا دابنێی! واتە ئەگەر هات و ژمارەی کۆترەکان لە ژمارەی هێلانەکان زیاتر بوو، ئەوە بەلایەنی کەم هێلانەیەک هەیە کە دوو کۆتر لەخۆ دەگرێت، بە زمانە بیرکارییەکە، ئەگەر بێت و n خانەت هەبێت و m شتت هەبێت، کاتێک $m > n$ ، ئەوە بە لایەنی کەم خانەیەک زیاتر لە شتێک دەگرێتە خۆی. ئەو ڕێسایە دەکرێت لە زۆر بارودۆخ بەکاربێت و جێبەجێ بکرێت. بۆ نموونە ئەکرێت بەهۆی ئەو ڕێسایە شتێک بسەلمێنیت ئەویش، ئەگەر شارێک 1,000,000 کەسی نا-کەچەڵ هەبن، ئەوە بەلایەنی کەم دووکەس هەن کە هەمان ژمارەی تاڵە مووی سەریان هەیە، واتە ژمارەی تاڵە مووەکانی دووکەسی ئەو شارە وەک یەکن. ڕاستی ئەمەش لەوەوە سەرچاوی دەگرێت کە کەسێکی ئاسایی نزیکەی 150,000 تاڵە مووی لەسەری هەیە، وا دانێ کەسێک ئەگەر مووەکانی سەری زۆر زۆرەکەی 900,000 بێت، بۆیە ئیستا 1,000,000 کەسمان (شت) هەیە m ، وە 900,000 ئەگەری تاڵە مووەکانی سەیری کەسێکە (خانە) بۆیە دەبینین کە $m > n$، واتە ژمارەی دانیشتوانەکە زیاترە لە ژمارەی مووەکانی سەری کەسێکی ئاسایی، بۆیە

لە ڕێگـــای ئەم ڕێســـایەوە دەگەیـــنە ئەوەی کە دوو کەس هەن بە دڵنیـــایی ژمارەی تاڵە مووەکانی سەریان هێندەی یەکە.



بیردۆزی گرین-تاو

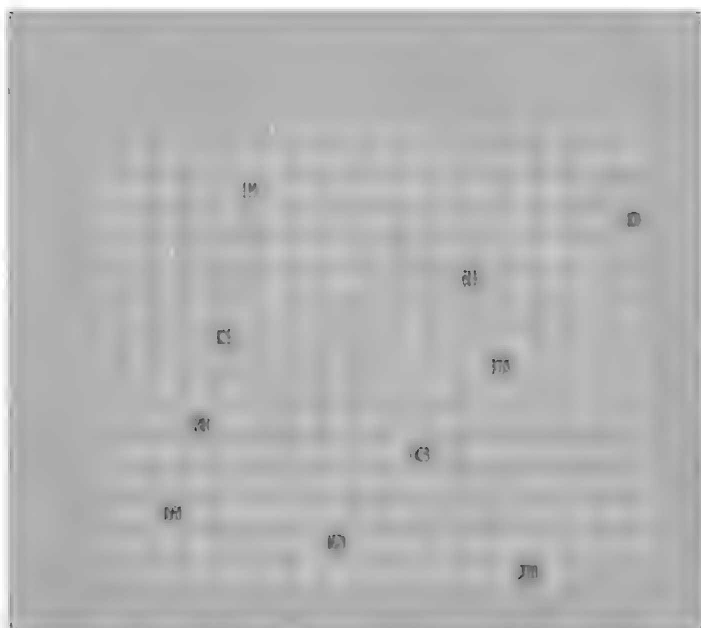
The Green-Tao theorem

بیـــردۆزی گـــرین- تـــاو، ســـەر بە تیـــۆری ژمارەکـــانە کە لە لایەن هەردوو بیرکـــاریزان "گـــرین و تـــاو" لە ســـاڵی 2004 ســـەلمێندار. دەقـــی بیـردۆزەکە دەڵێـت: لە نـاو کـۆمەڵەی ژمـارە خۆبەشـەکان، دەکرێـت دەسـتە-پـــۆلە ژمـــارەیەکی خۆبەشـــی یەکـــبەدوای یەک (progressions) بـدۆزرێتەوە، کە مەرجـیش نیـیە ئەو دەسـتە ژمـارە خۆبەشـە بە دوای یەکەوە بـن. واتە ئیسـتا بـۆ ژمارەکـانی 3،5،7 دیـارە ئەم سـێ ژمـارەیە کە خۆبەشـــن و جیـــاوازی نێـــوان تەنیـــا دوو یەکەیە، واتە ئەو ســـێ ژمـــارەیە بەیەکەوە ڕێســـایەکیان هەیە (یەکـــبەدوای یەکێکیـــان هەیە). بـــۆ ژمارەکـــانی تـری وەک: 5،11،17،23،29 بـۆ ئەو چەنـد خۆبەشـە، دیسـانەوە ڕێسـایەکی تـر هەیە، کە ئەم ڕێسـایە تەنیـا بـۆ ئەو چەنـد ژمـارەیە لەبـارە، ڕێسـاکەش ئەوەیە کە لە 5 دەسـت پێـدەکات، دواتـر ژمـارەی بەدەسـت هـاتوو لەگەڵ 6 کۆدەکرێتەوە، بەم شێوەیە:

$$5, 5+6=11, 11+6=17, 17+6=23, 23+6=29$$

لێـــرەوە ئەم ڕێســـایە زیـــاتر کارناکـــات. بـــۆیە ئەو یەکـــبەدوای یەکە کورتـــانە لە نـــاو ژمـــارە خۆبەشـــەکان لە مێـــژە زانـــراوە، بەڵام پێشـــتر تەنیـــا

کۆنجێکتەرێک[90] بووە، تا 'گرین و تیۆ' سەرکەوتووانە ئەم پرسەیان لە 2004 یەکلا کردەوە لە دەڤەری سیستەمە جولەدارەکان و تیۆری ژمارەکان.



[90] کۆنجێکتەر دەقێکە، بۆنی ڕاستی لێدێت، بەلام لەگەل ئەوەش هیچ سەلماندنێک ڕاستی پرسەکەی یەکلا نەکردۆتەوە. کۆنجێکتەر کە سەلمێندرا، دەبێتە بیردۆز.

پردەکانی کونیگسبرگ

The bridges of Königsberg

یەکێـک لە کێشـە هەر گەورەکـانی سـەدەکانی رابـردوو، بریتیبـوو لە کێشـەی حەوت پـردەکەی کونیگسـبرگ. ئەو کێشـەیە بـووە هـۆی ئەوەی کە لقێکی نـوێ لە بیرکـاری سـەرئاو بکەوێت بەنـاوی تیۆری هێڵکـاری- Graph theory. لە سـەدەی هەشـدەهەم، لە شـارۆچکەی کونیگسـبرگ لە بروسـیا کە دەکـاتە کـالینینگرادی ئێسـتای رووسـیا، حەوت دانە پـرد لە نزیکـی یەکتـر هەبـوون، کە ئەو پـردانە چـوار پـارچەی ئەو ناوچەیـان بەیەکدەگەیانـد، کە بەهـۆی رووبـار لە نێـوان ئەو پـارچە خاکـانە، ئەو 7 پـردە دروسـتکرابوون. پرسـیارەکە ئەوە بـوو: **دەکرێـت بەسـەر هەر حەوت پـردەکە برۆیـت، بەڵام دوو جـار بەسـەر هـیچ پردێـک نەڕۆیـتەوە؟** بە واتـایەکی: ئەگەر هەر پردێـک بـۆت هەبێـت یەکجـار بەسـەریدا برۆیـت، ئەوە دەتـوانی هەر حەوت پـردەکە ببڕیـت؟ ئیتـر دەتـوانی و نـاتوانی مقۆمقـۆی زۆر و تـاقیکردنەوەی زۆر نەبـووە هـۆی ئەوەی ئەو پرسـیارە بە شـێوەیەکی ورد وەڵام بـدرێتەوە، وە بیرکـردنەوەی لـێ ئاسـان نەبـوو، بەڵام تـا سـاڵی 1735 بیرکـاریزان لیۆنـارد ئـۆیلەر (Leonhard Euler) سـەلماندی کە ئەوە مەحـاڵە! واتە نـاتوانی هەر حەوت پـردەکە ببڕیـت بـێ ئەوەی هـیچ پردێـک دووبـارە نەکەیـتەوە. بە شـێوەی پەتـی (Abstract) دەکرێـت بڵـێین، هەر یەکێـک لە پـارچە خاکەکـان بـریتین لە سـەرێک (Vertex) یـان خاڵێـک(Point) ، ئەو خـاڵانە بەهـۆی راسـتەهێڵەوە-لێـوار بەیەک بەسـتراونەتەوە (Edge)، کە پردەکـان دەنـوێنن،

واتە ئێستا پارچە خاکەکان بریتین لە چەند سەرێک و پردەکان بریتین لە راستەهێڵی نێوان خاڵەکان، بەڵام لێرە دووری (Distance) کارمان پێی نییە و گرنگی پێنادەین. بۆیە بیرۆکەی نەخشە و GPS لەسەر ئەم لقەی بیرکاری دامەزراوە، کە شوێنی تۆ لە نەخشەکە بە خاڵێک پیشاندەدرێت، کە ئەو شوێنەی تۆ دەتەوێت بۆی بچیت بە راستەهێڵ یان بە چەماوە (curve) پیشان دەدرێت، جگە لەمەش لە دیزاین کردنی تۆڕەکانی ئاو و کارەبا و دروستکردنی خەریتەی ئامێرەکان، گشتیان سوود لە تیۆری هێڵکاری-گراف وەردەگرن.

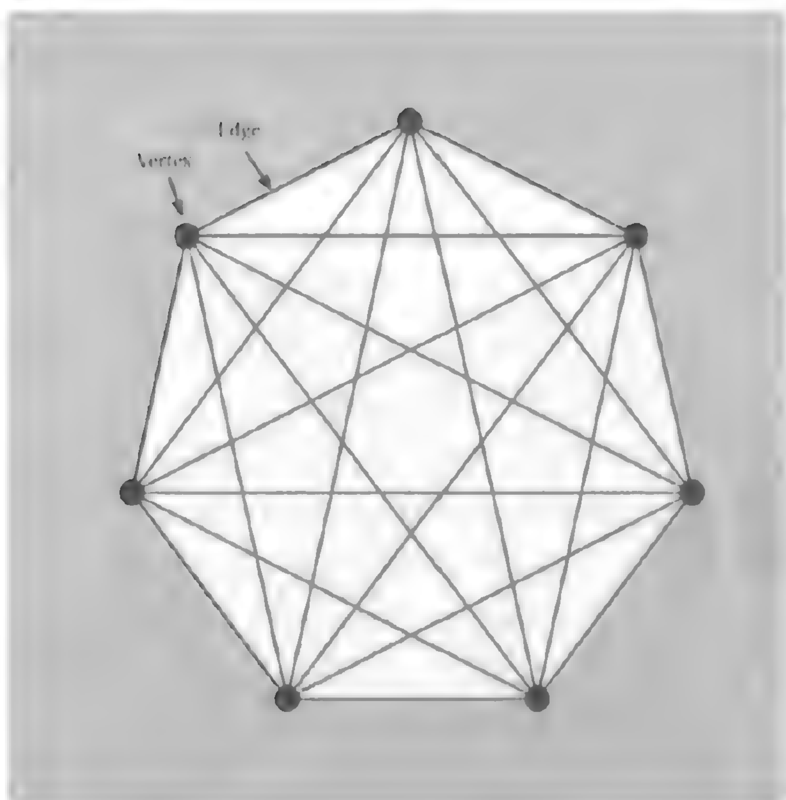


تیۆری هێڵکاری-گراف

Graph theory

تیـــۆری هێڵکـــاری، بـــریتییە لە لێکـــۆڵینەوە لە هەمـــبەر پێکگەیانـــدن (بەســـتنەوە). بە پـــێچەوانەی هێڵکـــاری نەخشـــەکان کە پێشـــتر باســـمان کـــردووە، لێـــرە هێڵکارییەکـــان لە کۆمەڵێـــک خـــاڵ-ســـەر(Vertex) و هێـــل (Edge) پێکهـــاتوون، کە هێڵەکـــان خاڵەکـــان بەیەکەوە دەبەســـتنەوە. چەنـــد ســـەرێکی یەکـــبەدوای یەکەکە بەهـــۆی هێڵەکـــانەوە بەیەکەوە بەســـتراونەتەوە، پێـــی دەوترێـــت رێچـــکە (Path). تیـــۆری هێڵکـــاری دەرگـــایەکە بـــۆ چارەســـەرکردنی زۆر کێشـــە، وەک چـــۆن لە بـــابەتی پێشـــوو کە کێشـــەی پردەکـــان بەهـــۆی تیـــۆری هێڵکـــارییەوە چارەســـەرکرا. هەنـــدێک جـــۆری هێڵکـــاری بنەهێڵکـــاری (Subgraph) لەخـــۆی دەگرێـــت، بنەهێڵکـــاریش هەر هێڵکـــارییەکە لە نـــاو هێڵکـــارییەکی تـــر. هەر لە تیـــۆری هێڵکـــارییەوە دەگەیـــنە دەرئەنجـــامی زۆر سەرســـوڕهێنەر، وەک یاســـای ئـــۆیلەر لە هەمـــبەر چەنـــد ڕووەکـــان، کە ئەم ڕیســـایە پەیوەنـــدییەکی تـــۆکمە لە نێـــوان تیـــۆری هێڵکـــاری و لقێکـــی تـــری بیرکـــاری دەردەخـــات، ئەویـــش شوێنناســـی (Topology). تیـــۆری هێڵکـــاری کۆمەڵێـــک جـــۆری لـــێ دەبێـــتەوە، کە دەتوانـــدرێت کردارەکـــانی وەک: ئـــاوێتە کـــردن، یەکگـــرتن... ئەمـــانە لەخـــۆ بگرێـــت، بـــۆ نمـــونە ئەگەر دوو هێڵکـــاری یەک بگـــرن چـــی بەســـەر دێـــت، وەیـــان ئەگەر دوو هێڵکـــاری ئـــاوێتەی یەکتربکـرێن چیـــان بەســـەر دێـت. ئەم لـقە تەنیـا بیرکارییەکـان پێـی ئاشـنا نـین، بەڵکـو فیزیکزانەکـان، کیمازانەکـان، زیندەوەرناســـەکان ئەوانـیش ئاشـــنای ئەم

تیۆرییەن، چونکە لە فیزیا و کیمیا، بۆ نواندنی بەندە ئایۆنییەکانی مادەیەک بەکاردێت، کە ئەمانە گشتیان بەهۆی تیۆری هێلکارییەوە لیان تێدەکەین. نموونەی دیکە؛ ئینتەرنێت و بڵاوبوونەوەی بە نێو شار و شارۆچکەکان، ئەمانە گشتیان لە ڕێگەی ئەم تیۆرییەوە گەشەی پێدەدرێت.



بیردۆزی چوار ڕەنگەکە

The four-color theorem

بیـــردۆزی چـــوار ڕەنـــگەکە، یەکـــێکە لە بیـــردۆزە هەرە جوانەکـــانی بیرکـاری کلاسـیکی. کە دەقـی بیـردۆزەکە دەڵێـت: **کەمتـرین ژمـارەی ڕەنـگ کە پێوسـتە بـۆ ڕەنگردنـی نەخشـەیەک، بەو مەجەی هـیچ دوو نـاوچەیەکی تەنیشـت یەک هەمـان ڕەنـگ وەرنەگـرن، ئەوە بەلایەنـی کەم چـوار ڕەنگمـان پێوسـتە.** واتە ئەگەر بێـت و بمـانەوێ گەڕەکەکـانی شـاری هەولێـر لەسـەر نەخشـە تەنیـا بە ڕەنـگ لێکیـان جیـابکەینەوە و هـیچ دوو گەڕەکێکـی تەنیشـت یەک هەمـان ڕەنـگ وەرنەگـرن، ئەوە بەلایەنـی کەم چـوار ڕەنگمـان پێوسـت دەبێـت. وەک لە وێـنەکە دیـارە. دووبـارە دەتـوانین ئەم باسـە لە ڕێـگەی تیـۆری هێڵکـاری دابڕێـژین و شـیکردنەوە و سـەلمینەی بـۆ بکەیـن، ئەویـش هەر نـاوچەیەک بە سـەرێک (vertex) دابنـێن، وە نابێـت هـیچ دوو سـەرێکی دراوسـێ هەمـان ڕەنگیـان هەبێت، کاتێـک ئەو سـەرانە بەهـۆی هـێڵەوە پێکەوە بەسـتراونەتەوە و سـنورێک دروسـتدەکەن. هەر وەک گرفتێـک شـیکردنەوەی گەلێـک کێشـەی لەم شـێوە، وامـان لێـدەکات هانـا بـۆ کۆمپیـوتەر بەریـن و لەوێ سـەیری ڕووداوەکـان بکەیـن. لە سـاڵی 1980 دووکەس بەناوەکـانی "کینـس ئەپیـل و ولفگانـگ هـاکین" (Kenneth Appel and Haken Wolfgang) ئەو ڕاسـتییەیان پیشـاندا بەهـۆی بەکارهێنـانی کۆمپیـوتەرەوە بـۆ پشـکنینی هەر یەک لە 2000 یـان زیـاتر بـاری شـاز و

جیـاواز. دواجـار سـەلماندنە فۆرمـاڵەکەی لە سـاڵی 2005 یەکلابـۆوە و ئەو پرسە بەکۆتایی گەیشت.

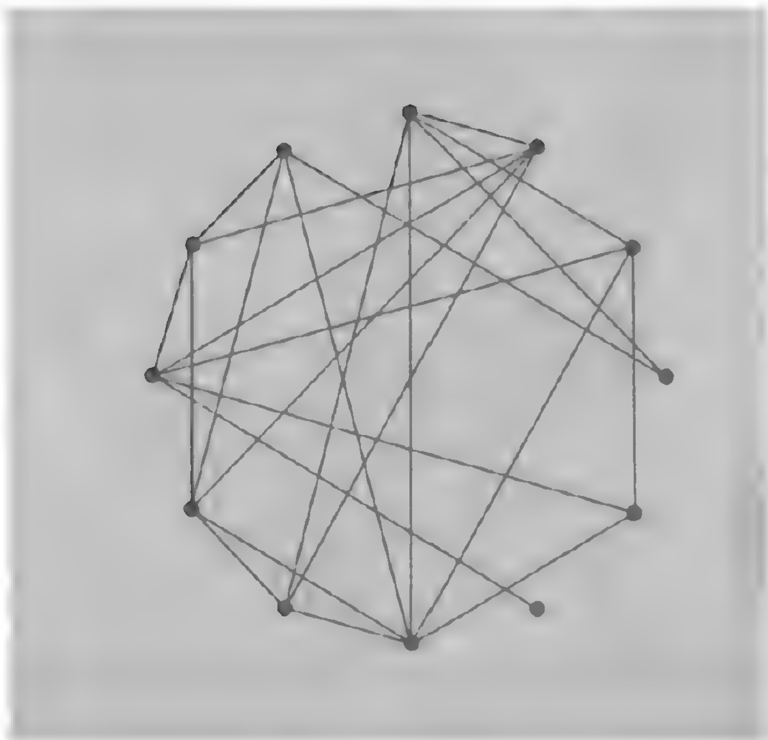


هێلکارییە هەڕەمەکییەکان

Random graphs

هێلکـــارییە هەڕەمەکییەکـــان (لە گـــۆترە) یەکـــێکە لەو هێلکارییـــانەی کە ئەو هـــێڵەی ســـەرەکان بەیەکەوە دەبەســـتێتەوە، بە شـــێوەیەکی هەڕەمەکـــی دابەشـــکراون بـــێ هـــیچ مەبەســـتێک. بـــۆ دروســـتکردنی هێلکـــاری لەم شـــێوەش، وادانـــێ کـــۆمەڵەیەک لە ســـەرمان هەیە N، بـــۆ هەر دووســـەرێک لەو کـــۆمەڵەیە هێڵێـــک دەکێشـــین بە ئەگەری P یـــان ئەگەری نەبـــوونی هـــیچ هێڵێـــک لە نێـــوان ســـــەرەکان بە ئەگەری 1-P. بە شـــــێوەیەکی تـــــایبەتی، لە هێلکـــــاری هەڕەمەکـــی، هەمیشـــــە ڕێچـــکەیەک هەیە کە هەر دوو ســـــەرێک بەیەکەوە دەبەســـتێتەوە، بـــۆیە بەو جـــۆرە هێلکـــارییە دەوتـــرێن هێلکـــاری پێکوەلکـــاو (Connected graph). هەروەهـــا ئەگەر دوو کـــۆمەڵەی کۆتادارمـــان هەبێـــت، هەر کـــۆمەڵە و چەنـــد ســـەرێکی تێـــدا بێـــت، ئەوە ســـەرێک هەیە کە بەهەمـــوو ســـەرەکانی نـــاو یەکێـــک لە کۆمەڵەکـــان بەســـتراوەتەوە کە بە کـــۆمەڵەکەی تـــر نەبەســـتراوەتەوە. ئەوە ڕێگـــایە کە هێلکـــاری هەڕەمەکـــی بە شێوەیەکی نمـونەیی پەرە دەسـەنێت و دروسـت دەبێت، لەگەڵ ئەوەش، تـا N زیـــاتر بێـــت، ئەوە ســـەرنج ڕاکێشـــتر دەبێـــت، بە پـــێچەوانەوە تـــا N بچـوکبێتەوە، ئەوە هێکـارییەکە و بەشـەکانی بچـوک دەبێـتەوە و هـیچ خولێـک لە هێلکـــارییەکە بـــوونی نابێـــت. لێـــرە ڕێگەیەکـــی کـــورت هەیە لە مەڕ تایبەتمەنـدی لکـاوەیی (connectivity)، ئەویـش ئەگەر p بچـوکتر بێـت لە

$\frac{ln(N)}{N}$، ئەوە سەرێکمان دەبێت لە هێلکارییەکە کە بە هیچ سەرێک نابەستریتەوە (Isolated vertex).



بەشی یازدەهەم

ئاهووتە و تۆپۆلۆجی

Space and Topology



ئاهووتە مەترییەکان

Metric spaces

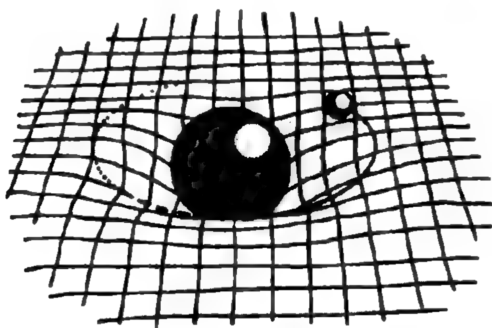
ئـــاهووتە مەترییەکـــان، بـــریتییە لە یەکێـــک لە بـــابەتە شـــیکردنەوەییەکانی بیرکـــاری، کە تێـــدا وەســـفی دووری نێـــوان دوو شـــتمان بـــۆ دەکـــات. واتە بـــۆ ئەوەی باســـی دووری نێـــوان دوو شـــت بکەیـــن، ئەوە دەبێـــت پێوەرێـــک هەبێـــت بـــۆ ئەوەی ئەو دوورییەی پـــێ وەســـف بکەیـــن یـــان بـــدۆزینەوە. ئـــاهووتە مەترییەکـــان چەنـــد جۆرێکیـــان هەیە، هەر یەکەو بەجۆرێـــک پێناســـە کـــراوە، بـــاوترین ئـــاهووتەی مەتـــری، کە ناســـراوترینە پێـــی دەڵـــێن: ئـــاهووتەی ئیقلیـــدی دوو ڕەهەنـــدی (Usual metric space)، کە لەم ئـــاهووتەیە دووری نێـــوان دوو خـــاڵ x و y بـــریتییە لە درێـــژی ئەو ڕاســـتەهێڵەی کە ئەو دوو خـــاڵە بەیەکەوە دەبەســـتێتەوە. شـــتێکی تـــر کە لێـــرە گـــرنگە، ئەویـــش ئەو کـــۆمەڵەیەی کە ئەو ئـــاهووتەیەی لەســـەر پێنـــاس دەکەیـــن چییـــە، وە چـــۆن پێناســـەی دەکەیـــن. ئـــاهووتەی ئیقلیـــدی ئەو ئـــاهووتەیە کە لەگەڵ ژیـــانی ڕۆژانەی ئـــێمە تەواو یەکـــدەگرێتەوە، چـــونکە وەک نمـــونە لە هەنـــدێک ئـــاهووتەی مەتـــری (Descrete) بە پێـــی پێناســـەکەی دەڵێـــت: دووری نێـــوان مـــن و خـــاڵم لە شـــارۆچکەی کـــۆیە؛ کە لە دوو شـــاری جیـــاوازین، ئەوە دووری نێوانمـــان بـــریتییە لە 1! ئەوەش لە ڕاســـتی ئەگەر ســـەیر بکەیـــن مەحـــاڵە، بـــۆیە ئـــاهووتەی ئیقلیـــدی ئەو ئـــاهووتەیە کە لەگەڵ ژیـــانی ئـــێمە، چـــوون و هاتنمـــان یەک دەگـــرێتەوە. بە شـــێوەیەکی گشـــتی، مەتـــرییەک d و کـــۆمەڵەیەک X پێـــان دەوتـــرێن ئـــاهووتەی مەتـــری، ئەگەر بێـــت و d

نەخشـــەیەکی ڕاســـتی بێـت لە جـووتە ڕێکخـراوی (x,y) و ئەو ســێ مەرجەی خوارەوە جێ بەجێبکات:

1- پێویســـتە دووری نێـوان هەر دوو خاڵێـک، گەورەتـر بێـت لە ســفر، وە ئەگەر دووری نێـوان دوو خـاڵ کـردییە ســفر، ئەوە ئەگەر و تەنیـا ئەگەر دەبێت ئەو دووخـاڵە یەکسـان بـن. (واتە ناکرێـت بڵـێن: مـن 2- مەتـر لە تـۆ دوورم!)

2- دووری نێـوان x و y جیـاوازی نەبێـت لەگەڵ دووری نێـوان y و x . (ئەگەر دووری تـۆ لە مـن دوو مەتـر بێـت، حەتـمەن دووری مـن لەتـۆش هەر دوو مەترە)

3- بـۆ هەرخاڵێـک z، دووری لە نێـوان x بـۆ y بچـوکترە یـان یەکســانە بە 'دووری نێـوان x و z' + 'دووری نێـوان z و y'. (بـۆ نمـونە ئەگەر تـۆ لە مـاڵی خۆتـان بچیـتە بـازاڕ، ئەوە ئەو دووریـیە لە نێوان مـاڵی ئێـوە و بـازاڕ هەیە، بچـوکتر یـان یەکسـان دەبێت ئەگەر بێـت و تـۆ لە مـاڵی خۆتان بچیتە پاڕکێک z ، پاشان لە پاڕکەکەوە بچیتە بازاڕ)

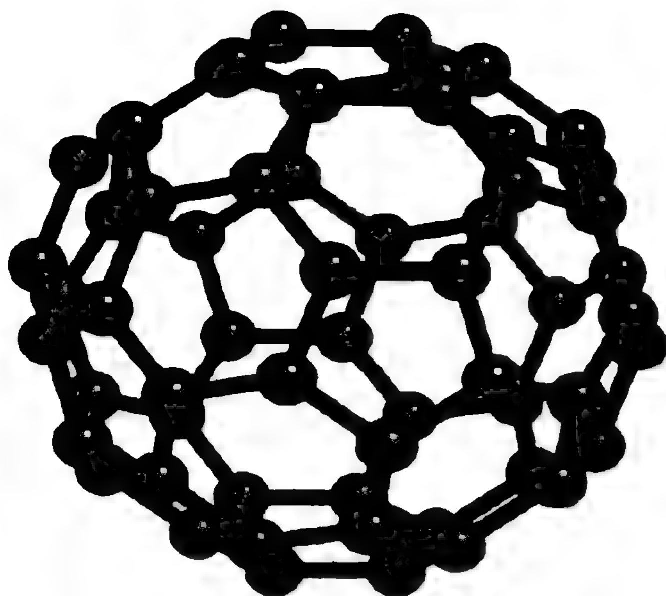


ڕاگیرکەرەکان

Geodesics

ڕاگیـرکەر، بـریتییە لە کـورترین ڕێچـکە لە نێـوان دوو خـاڵ لە ڕووەکـی چامـاوەیی. وەک چـۆن دەزانـین لە ڕووەکـی تەخـت کـورترین ڕێچـکەی نێـوان دوو خـاڵە بە راسـتەهێڵ بەیەک دەگەیەنـین، بە واتـایەکی تـر، لە ڕووەکـی تەخـت، کـورترین ڕێچـکە بـریتییە لە ڕاسـتەهێڵ. بەڵام کاتێـک ڕووەکـی چاماوەمـان هەبێـت، ئەوە کـورترین ڕێچـکە لە نێـوان دوو خـاڵی ئەو ڕووە چەمـاوەییە، بـریتییە لە هێڵێکـی چەمـاوەیی، دۆزیـنەوەی ئەو هـێڵە چەمـاوەیە بەهـۆی ئـاهووتەیەکی مەتـرییەوە دەبێـت. بـاوترین ڕاگیـرەکەری نـا-ئیقلیـدی بـریتییە لە بـازنە! وەک هێڵەکـانی یەکسـانی گـۆی زەوی و ڕێچـکەی فڕینـی فــرۆکە. لە زۆر بــاردا، ڕاگیرکەرەکــان دەتوانــدرێت دیاربکرێــت و دوورییەکەیـــان بـــدۆزرێتەوە بەهـــۆی تەواوکـــارییەوە، وەک چـــۆن ئەو هاوکێشـانەی نەخشـە و داتاشـراوی نەخشـەکانی تێـدایە وەسـفی ئەو ڕێگـایە (ڕێچـــکەیە) دەکەن کە لە نێـــوان دوو شـــتدا هەیە، هەر ئەمەش بـــوو کە ڕاگیرکەرەکـان وەسـفی تیـۆرییەکەی ئەنشـتاینیان کـرد، واتە ئەنشـتاین لە مەڕ تیـــۆری کێشـــکردنی گشـــتی، ڕاگیرکەرەکـــانی بەکارهێنـــاوە، کاتێـــک ڕاگیرکەرەکـــان ئەو ڕێچکـــانە پیشـــان دەدات کە تەنێـــک لە بۆشـــایی-کـــات چـۆنە، وە چـۆن ئەو تەنە بۆشـایی-کـات دەچەمێنێـتەوە. بـۆیە لە ڕاسـتیدا کـورترین ڕێچکەکـان لە نـاو بۆشـایدا، بـریتین لە ڕاگیـرکەرە چەماوەییەکـان، کە دەتـوانن ئەو خـولانەوەی هەسـارەکان ڕوونـبکەنەوە کە بە دەوری خـۆر

دەســـورێنەوە و، هەر بەهـــۆی ئەو ڕاگیــرکەرە چەماوەییـــانە تـــوانرا وەســـفی شــکانەوەی ڕووونـــاکی بکرێــت کــاتێ ڕووونـــاکی بە نزیــک تەنێکـــی بارســـتە زۆر گەورەی وەک کونە ڕەشەکان تێپەڕ دەبێت.



بیردۆزی خاڵی نەگۆڕ-جێگیر

Fixed point theorems

بیـــردۆزی خـــاڵی نەگـــۆڕ-جێگیـــر، یەکـــێکە لە بیـــردۆزە جوانەکـــانی بیرکـــاری. ئەو بیـــردۆزە لەهەمـــبەر نەخشـــەیەک، کە چەنـــد مەرجێکـــی هەیە، ئەگەر لەو نەخشـــەیە هەبێـــت، ئەوە ئەو بیـــردۆزە بەســـەر ئەو نەخشـــەیە جێبەجـــێ دەبێـــت. ئەویـــش ئەوەیە: نەخشـــەیەک لە ژێـــر ئەو چەنـــد مەرجە ئەگەر لێـــی بێـــتە دیـــی، ئەوە بەلایەنـــی کەم خاڵێـــک هەیە کە هەمیشـــە بە جێگیـــری دەمێنیـــتەوە لە شـــیوەگۆڕکێی و جێگۆڕکێیەکـــان، واتە خاڵێـــک هەیە کە $f(x) = x$. یـــانی کاتێـــک ئـــێمە دێـــن شـــێوەی تەنێکـــی ئەنـــدازەیی دەگـــۆڕین، ئەوە خاڵێـــک هەیە لەو تەنە کە پـــێش گـــۆڕان و دوای گـــۆڕانی شـــێوەکە هەر وەک خـــۆی دەمێنیـــتەوە! بـــۆ تێگەیشـــتنی باشـــتر لەمە، وادانـــێ کاغەزێکـــت هەیە و وێنەیەکـــی لەســـەرە (وەک ئەو وێـــنەی دراوە) ئەگەر بێـــت ئەو کـــاغەزە لەبەرگیـــراوە (کـــۆپی) لـــێ هەڵگـــرین، پاشـــان یەکێکیـــان دەق ونوشـــت بکەیـــنەوە لە نـــاو دەســـتمان، پاشـــان هەر هەمـــان ئەو کـــاغەزە بکەیـــنەوە، ئێســـتا دەبینـــین کە ئەو کـــاغەزە چرچـــو لـــۆچی تـــێکەوتەوە وەک ســـــەرەتا نیـــــیە، ئێســـــتا ئەو پەڕەی چرچـــــو و لۆچمـــــان کـــــرد لەگەڵ لەبەرگیـــراوەکەی هەر هەمـــان کـــاغەزە بەراورد بکەیـــن، دەبینـــین شـــێوەکەی گـــۆڕاوە، بەڵام ئەم بیـــردۆزە دەڵێـــت، بەلایەنـــی کەم خاڵێـــک هەیە لەو کـــاغەزە هـــیچ گـــۆڕانی بەســـەر دانەهـــاتووە! مەرجەکـــانیش کە لە نەخشـــەکە پێوســـتە هەبێـــت، ئەمـــانەن: ناکرێـــت پەڕەکە ببـــڕین و دواتـــر ســـەیری ئەو کـــردارە

بکەین، بۆیە مەرجە نەخشـەکە بەردەوام بێت و پچڕانـی تێدا نەبێت، پێوسـتە شـێوەگۆڕاوەکە لە سـنووری قەبـارە و پێـوانی شـێوە ڕەسـەنەکەی خـۆی لانەدات، واتە پێوسـتە نەخشـەکە نەخشـەیەکی داخـراو-شیشـدراو[91] بێـت. ئەم بـابەتە لە زۆر بـوار بەکاردێـت و سـوودی لـێ وەردەگیرێـت، بە تـایبەتی لە مایکرۆئیکۆنۆمیـک، وە هەروەهـا لە سـەلماندنی هەبـوون و تاقـانەیی (Existence And Uniqueness) لە شـیکارەکانی بـابەتی هاوکێشـە جیاکارییەکـان (Differential equations)، هەروەهـا لە وانەی ، شیکردنەوەی ژمارەییانە (Numerical analysis).



[91] خەلکی هەولێر زۆر جار لە بری وشەی 'داخراو'، وشەی 'شیشدراو' بەکاردێنن.

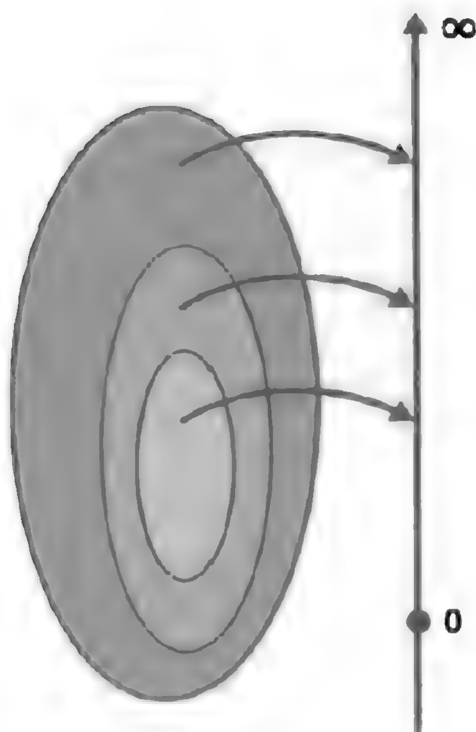
تیۆری پێوان

Measure theory

تیـۆری پێـوان، یەکـێکە لە تیـۆرە گرنگەکـانی بیرکـاری، کە تێـدا وەسـفی قەبـارەی (size) کۆمەڵەکانمـان بـۆ دەکـات و دەیانپێوێـت، هەروەهـا بیرۆکەکـانی وەک: درێـژی، ڕووبەر یـان قەبـارە (volume) دەگشـتێنێت. کاتێـک کـۆمەڵەیەک دەپێورێـت، ئەوە ژمـارەیەک دیـاری دەکەیـن، جـا ئەو ژمـارەیە بـۆ کێشـەکەیەتی، یـان بـۆ بەرزییەکەتـی یـان هەرشـتێکی تـر. تیـۆری پێـوان لە بـابەتی تەواوکـاری لیبیـگ گـرنگە، چـونکە تەواوکـاری لیبیـگ پشـت ئەسـتوورە بە تیـۆری پێـوان، وە پێـوان لە تەواوکـاری لیبیـک مەبەسـت لە پێـوانی کـۆمەڵەیەکە لە ژمـارە. بـۆ نمـونە پێـوانی بەشـە کـۆمەڵەیەک، بچـوکتر یـان یەکسـان، دەبێـت بە پێـوانی کـۆمەڵە ڕەسـەنەکە خـۆی. بـۆ نمـونە: کـۆمەڵە هەیە پێـوانەکەی دەکـاتە سـفر تەنـانەت ئەگەر چـش ئەو کـۆمەڵەیە کۆمەڵێـک خاڵیشـی تێـدابێت! بـۆ نمـونە: ئەگەر شـتێک یـان ڕیسـایەک لەسـەر کـۆمەڵەیەک ڕاسـت بێـت کاتێـک ئەو کـۆمەڵەیە پێـوانەکەی سـفر نەبێـت، ئەوە ئەو ڕیسـایە یان ئەو شتە نزیکەی بۆ هەموو دانەکانی ناو کۆمەڵەکە ڕاستە!

تیـۆری پێـوان لە هەژمـارکردنی ڕووبەر بە ڕێگـای لیبیـگ ڕۆڵـی هەیە، ڕۆڵەکەشـی چارەسـەری ئەو کێشـانە دەکـات کە تەواوکـاری ڕیمـان لە توانـای دا نەبـووە چارەسـەری بکـات، بـۆیە بەهـۆی تیـۆری پێـوانەوە، هەژمـارکردنی ڕووبەر پێشـکەوتنی بەخـۆیەوە بینـی. لە کۆمەڵەکـان وەک:

کـــۆمەڵەی ژمـــــارە ڕێژەییەکـــان، پێـــوانی ئەو کـــۆمەڵەیە دەکــــاتە ســـــفر! (Measure of zero) .



کۆمەڵە ئازادەکان و ئاهوتە تۆپۆلۆجییەکان

Open sets and topological spaces

کـــۆمەڵە والاکـــان-ئازادەکـــان، ئەو کـــۆمەڵانەن کە هەر دانەیەکـــی نـــاو کـــۆمەڵەکە بەجۆرێـــک نـــزیکە لە هەر دانەیەکـــی تـــری نـــاو کـــۆمەڵەکە. لە ئـــاهووتەی مەتـــری، کـــۆمەڵەی ئەو خـــالانەی کە دوورییـــان لە خـــاڵێکی وەکX بە تەواوی بچـــوکترە لە ژمـــارەیەکی بچـــوکی وەک r، ئەوە ئەو کـــۆمەڵەیە کـــۆمەڵەیەکی ئـــازادە، کە پێـــی دەوترێـــت تـــۆپی ئـــازاد (Open ball) لە نیـــوەتیرەی r. بـــۆ نمـــونە: ئەگەر لە قوتابخـــانەیەک لە پـــۆلی یەکـــی بنەڕەتـــی هەمـــوو قوتابییەکـــان تەمەنیـــان بە بەراورد بە قوتـــابییەک تەنیـــا چەنـــد ڕۆژێکـــی کەمـــی بەیـــن بێـــت، ئەوە بەو پـــۆلە دەوترێـــت پـــۆلێکی ئـــازاد یـــان والا. چەمـــک و بـــابەتی کـــۆمەڵەی ئـــازاد، کەرەســـتەیەکە بـــۆ ئەوەی بـــابەتی تـــری پـــێ پێناســـە بکەیـــن، وە یـــان بیـــرۆکەی تـــری لێـــوە ســـەرئاوبخەین. یەکێـــک لە لقەکـــانی بیرکـــاری کە بـــریتییە لە تۆپۆلـــۆجی کە لەســـەر بنچینـــەی کـــۆمەڵەی ئـــازاد خەت و خـــاڵی داڕێـــژراوە. ئـــاهوتەی تۆپۆلۆجیـــانە، بـــریتین لە کـــۆمەڵەیەکی بیرکارییـــانە کە لەســـەر بـــنە کۆمەڵەکـــانی کـــۆمەڵەیەک پێنـــاس دەکرێـــت T، کە پێـــان دەوتـــرین کـــۆمەڵە ئازادەکـــانی ئـــاهووتەکە، لەکاتێـــک کە ئەو کـــۆمەلانە لە پێشـــتر پێناســـە کـــراوە نەک بەهـــۆی بیـــرۆکەی دوورییـــەوە، چـــونکە لە ئـــاهووتەی تۆپۆلـــۆجی شـــتەکان تۆزێـــک جیـــاوازە، چـــونکە بەهـــۆی کـــۆمەڵەی ئـــازاد؛ ئـــێمە وەســـفی دەوروپشـــتی دانەکـــانی نـــاو کـــۆمەڵەکە دەکەیـــن، بەڵام لە

ئـاموتەی مەتـری بەهـۆی دەوروپشـتی (Neighborhood) دانەکـانی نـاو کۆمەڵەکەوە بڕیاری ئەوە دەدەین کە کۆمەڵەیەک ئازادە یان نا.

لە بیرکاریـدا، ئەگەر کۆمەڵەیەکمـان هەبێـت X کە $X \neq \phi$ وە τ خێزانێـک بێـت لە بنەکـانی X ئەوە τ پێـی دەوترێـت ' تۆپۆلـۆجی لەسـەر کۆمەڵەی X'، ئەگەر هاتوو ئەو چەند مەرجەی خوارەوەی جێ بەجێکرد:

1- کـۆمەڵەی T، دەبێـت ئـاموتە ڕەسـەنەکە و کـۆمەڵەی بەتـاڵی (ϕ) تێدا بێت. (ϕ،$X \in \tau$)

2- بـۆ هەر دوو بـنە کـۆمەڵەیەکی نـاو τ ، دەبێـت یەکتـر بڕینـی ئەو دوو بنە کۆمەڵەیەش لە ناو τ بوونیان هەبێت.

3- یەککرتنـی هەر چەنـد بـنە کـۆمەڵە لە نـاو τ ، دەبێـت لە نـاو τ بوونی هەبێت.

هەر لەم ڕێـگەیەوە بەردەوامـی دەردەکەوێـت، کە پێشـتر لە ڕێـگەی ئامـانجەوە باسـی بەردەوامیمـان کردبـوو، بـۆیە هەر لە ڕێـگەی کـۆمەڵەی ئـازاد، دەکرێـت لێکـۆڵینەوە لەسـەر بەردەوامـی نەخشـە بکەیـن، ئەویـش بەو شـێوەیە: نەخشـەیەک بەردەوامە ئەگەر بێـت و نەخشـەی هەڵـگەڕاوەی هەمـوو کـۆمەڵەیەکی ئـازاد لە مەودای نەخشـەکە، بە هەمـان شـێوە کۆمەڵەیەکی ئازاد بێت لە بواری نەخشەکە.

یەکێکــی تــر لە بــابەتە گرنگەکــانی ئــاهووتەی مەتــری، بــرتییە لە بیــرۆکەی پــتەوی (compactness) کە بەهــۆی بیــرۆکەی کــۆمەڵەی شیشــدراو (داخــراو) ســەرچاوەی گرتــووە. شــتێکی تــر لە تۆپۆلــۆجی هەیە پێــی دەوترێــت: داپۆشــەر (cover)، داپۆشــەر بــریتییە لە دەســتەیەک لە کــۆمەڵەی ئــازاد کە پــێکەوە یەکیــان گرتــووە، ئەگەر بێــت و ئاهووتەیەکمــان (space) هەبێــت، وە بتــوانین ژمــارەیەکی دیــاریکراو لەو دەســتە ئــازادە وەرگــرین و گشــت ئاهووتەکەمــان داپۆشــیت، ئەوە بەو ئــاهووتەیە دەوترێــت: ئــاهووتەیەکی پــتەو یــان پەســتێنراو (compactness). بە واتــایەکی تــر، چەنــد کــۆمەڵەیەکی ئــازاد هەبــن بەو مەرجەی ژمارەیــان زانــراو بێــت (ناکۆتــا نەبێــت)، وە بتــوانن ئــاهووتەکە داپۆشــن، ئەوە بەو ئــاهووتەیە دەوترێــت ئــــاهووتەیەکی پەســـــتێنراو. بە نمــــوونەیەکی کــــۆنکریتی ئەمە زیـــاتر روونــدەکەینەوە: وا دانــێ ناکۆتــا لیتــر بۆیاغمــان-ســبوغ هەیە! وە رێگایەکمــان هەیە کە دەمانەوێــت ئەو رێگــایە بۆیــاغ بکەیــن، بــۆیە ئەگەر توانیمــان رێگــاکە بە چەنــد لیترێــک (واتە بــۆ نمــونە n لیتــر) بۆیــاغ بکەیــن، ئەوە بەو رێگــایە دەوترێت: Compact.

فراکتاڵەکان

Fractals

فراکتەڵەکــــان، پێکهــــاتەیەکی ئەنــــدازەیییە، کە لە گەورەکــــردنەوە و دووبــارەکردنەوەی شــێوە ئەنــدازەیییە لێکچــووە شــێوە بنەڕەتیــیەکە پەیــدا دەبێــت. بە دەســتەواژەیەکی تــر؛ فراکتــاڵ بە پێکهــاتەیەک دەوترێــت کە هەر بەشێکی، هاوشێوەی شێوە گشتییەکەیە.

فراکتــــــاڵ لە دوور و لە نــــــزیکەوە وەک یەک دەبینرێــــــت، بەم تایبەتمەنــدییەی فراکتــاڵ دەڵــێن: لەخۆچــوویی (self-similar). فراکتاڵەکــان یەکێــک لە ئــامرازە گرینگەکــانی گرافیکــی کۆمپیــوتەرە. وشــەی فراکتــاڵ لە ســاڵی 1976 لەلایەن ماتمــاتیکزان بێنۆیــت مانــدێلبۆرت هــاتە نــاو دونیــای بیرکارییەوە.

بە زمــــانی بیرکارییــــانە فراکتاڵەکــــان بــــریتییە لەو کــــۆمەڵانەی کە پێکهــاتەیەکی دووبــارەکی هەیە لەســەر پێوەرێــک. نمــونە وەک: ســێیەکی ناوەنــدی کــۆمەڵەی کــانتۆر، یــان ســنورەکانی کــۆمەڵەی مانــدێلبۆرت، کە سـنورەکانی ئەمــانە هەرچەنــد ســەیری بکەیــن و گەورەی بکەیــن، دووبــارە بــوونەوەکی تێــدا دەبینــین. شــێوە ئــاڵۆز و ڕووە تەلســماوییەکەی فراکتەڵەکــان، مەرج نیــیە بەهــۆی ئەنــدازەی ئیقلیــدەوە بژێــر درابێــت. ســێیەکی ناوەڕاســتی کــۆمەڵەی کــانتۆر، کــۆمەڵەیەکە کە هــیچ ڕەهەنــدێکی تەواوی نیــیە

وەک دەستە (collection) خاڵێک ، بەڵام لەگەڵ ئەمەش، کۆمەڵەیەکی نەژمێردراوە (uncountable).

فراکتاڵەکان شتانێکی سروشتین بۆ لێکۆڵینەوە لە خاڵێک؛ لە دیدی تیۆری پێوانەوە (measure theory). بە شێوەیەکی تایبەتیانە، تیۆری پێوانە دەکرێت بەکاربهێندرێت بۆ پێناسەکردنی جێگرەوەیەک بۆ چەمک و دەستەواژەی (ڕەهەند)، لەو ڕووە؛ سێیەکی ناوەراستی کۆمەڵەیی کانتۆر ڕەهەندێکی هەیە لە نێوان 0 و 1 .



کاتژمێری فراکتاڵی هەتاوی

Fractal sundials

کـــــاتژمێری فراکتـــــاڵی هەتـــــاوی، یەکێـــــک لە بیـــــرۆکە هەرە سەرنجراکێشـــەکان کە لە لایەن بیرکـــاریزان (Kenneth Falconer) لە ســالی 1900 پێشــنیازکرا. فــالکونەر تــوانی بە بیردۆزیــانە ئەوە بیســلەمێنێت، کە ئەم کــاتژمێرە هەتــاوییە، دەکرێــت دروســتبکرێت، کە فراکتــاڵێکی ســێ ڕەهەنــدییە، کە لە ڕێــگەی ئەم فراکتــاڵە ســێ ڕەهەنــدیە دەتــوانین کــات بــزانین، ئەویــش بەهــۆی ئەوەی کاتێــک تیشــکی ڕۆژ بە نــاو ئەم فــراکتەڵە تێــپەڕ دەبێــت و ســێبەرێک دروســت دەکــات، ئەوە ســێبەرەکە بە ژمــارەی دیجتەڵــی عربــی دەردەکەوێــت، ئەو ژمــارانەش کاتمــان پــێ دەڵێــت. خــاڵی دەســتپێکی فــاڵکونەر، بــــڕیتییە لە هەبــــوونی یەکــــبەدوای یەکێــــک لە ئەســــتوبوونی ژمارەکــان یــان پیتەکــان کە کێشــراون لە ڕووتەختــدا. فــاڵکونەر پیشــانی دا کە بــۆ هەر یەکــبەدوای یەکێکــی لەم جــۆرە، کــۆمەڵەیەکی فراکتـــاڵ هەیە بەو مەرجەی کاتێــک گۆشـــەکە بــۆ خـــۆر کـــاردانەوەی هەیە بـــۆ گۆشـــەکانی یەکـبەدوای یەکەکە. ئەو ئاسـۆکەی (سـێبەر) کە فراکتـاڵەکە دروسـتی دەکـات لەسـەر ڕووتەخـت، نـزیکە لە نووسـینێک یـان ژمـارەیەکی مەزنـدەکراو، کە ئەمەش بەهـــۆی گۆشـــەی ئەو تیشـــکانەی دەکەوێـــتە ســــەرفراکتاڵەکە. ســەلماندنەکەی فــاڵکونەر دروســتکەر نەبــوو، بەڵکــو تەنیــا مۆدێلێــک بــوو: ئەو تەنیـــا ســــەلماندوویەتی کە کـــاتژمێرێکی لەو شـــێوە مـــومکینە، بەڵام ئەو

ڕێگـــایەکەی نەخســـتۆتە ڕوو بـــۆ دیـــارکردنی شـــێوەی ئەو فراکتـــاڵە ، بەڵام ئێستا ئەو کاتژمێرە هەیە و بەردەستە.



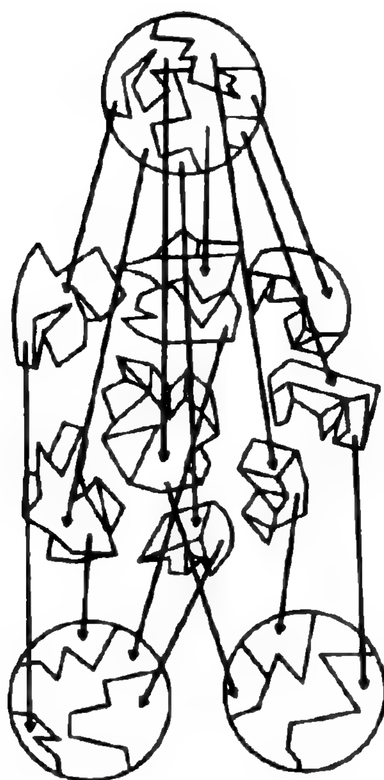
ئەم شێوەی سەرەوە کاتمان پێ دەڵێت بەهۆی فراکتاڵێکی فیزیکی.

پارادۆکسی بەناخ- تارسکی

The Banach-Tarski paradox

پارادۆکسی بەناخ- تارسکی، یەکێکە لە پارادۆکسە هەرە سەیرەکان، کە دەڵێت: گۆیەکی سێ ڕەهەندی دەکرێت بکرێتە چەند پارچەیەک و بشکێندرێت، پاشان هەر بەو چەند پارچەیە دوو گۆی تر دروست بکەین عەینەن وەک گۆیە ڕەسەنەکەی سەرەتا! وادانێ شوتییەکی خڕمان هەیە، ئەو شوتییە دەکەیتە چەند پارچەیە، پاشان ئەو پارچانە بە جۆرێک پێکەوە دەلکێنیت، واتە بە شێوەیەکی زیرەکانە، ئەوە لە ئەنجام دەتوانی دوو شووتی لە پارچەکانی ئەو شوتییە دروست بکەی! بەشێوەیەک ئەو پارچانە نە دەپەستێندرێت وە نەدرێژ و گەورەریان دەکرێت، واتە بەبێ دەستکاری، سروشتی پارچەکان چۆن هەیە هەر بەو شێوە بەکاری بێنەوە، بەڵام چۆن چۆنی پارچەی دەکەی ئەمە شتێکی ڕێگە پێدراوە، واتە مەبەست ئەوە نییە تۆپەکە دەکەینە چەند پارچەیەک بە هەڕەمەکی. ڕاستی ئەمەش لە قسەی حەلەق و پەلەق دەچێت، چونکە قەبارەی گۆیەکە پێش پارچەکانی دەبێت بکاتەوە هەر هەمان قەبارە دوای ئەم پرۆسەیەش! واتە چۆن دەبێت شوتییەکی 5 کیلۆیی بە گوێرەی ئەم قسەیە تێکە و لێکەی لەگەڵ بکەیت بیکەینە 10 کیلۆ! واو دوو شووتی؟! لە لایەکی تر، ئەمە دیارە کە نابێت ئەگەر بیرۆکەی قەبارە- بۆ تۆپێکی فیزیکی بێت، بەڵام بۆ تۆپێکی بیرکارییانە (Abstarct) دەکرێت هەڵبژاردەی تر هەبێت. ئەو

ئەنجامە لەسەر کۆمەڵەیەکی نەژمێردراو پشتی پێ بەستراوە، کە دەستە خاڵێک کە قەبارەیەکی نا ئاساییان هەیە.



تۆپۆلۆجی

Topology

تۆپۆلۆجی-شوێنناسی یەکێکە لە لقەکانی بیرکاری. تۆپۆلۆجی وەسفی شێوەکان (shapes) دەکات و گرنگی بە مانەوەی ئەو تایبەتمەندییانە دەدات کاتێک شتێک لە شێوەیەک دەگۆڕێت بۆ شێوەیەکی تر. بەلای تۆپۆلۆجی، گۆڕانی شێوە گرنگ نییە، ئەوەی گرنگە سیفەت و تایبەتمەندییەکان وەک خۆی بمێنێتەوە. واتە وەک چۆن زێر هەر بە نرخە بە هەر شێوەیەک بێت، ڕێک بێت یان نارێک بێت، ئەوە تۆپۆلۆجیش بەو بیرۆکەیە مامەڵە لەگەڵ شتەکان دەکات. لە دیدی تۆپۆلۆجی کوپێکی قاوە خواردنەوە و کێکێکی دۆنات وەک یەکن، چونکە ئەو دووانە هەر دووکیان یەک ڕوویان هەیە و یەک کونی تێدایە.

هەندێ لە شێوەی تری تۆپۆلۆجی کە دەتواندرێت بە ئاسانی دروستبکرێت بەهۆی کاغەز و سمخەوە (Glue) کاتێک هەردوو کۆتاییەکەی بە یەک ببەستینەوە. شێوەی تری تۆپۆلۆجییانە وەک: شریتی مۆبیۆس (Möbius strip)، بوتڵەکەی کلاین (Klein bottle) کە لە ڕووی تیۆرییەوە دەکرێت دروستبکرێت بەهۆی خستە پاڵ و زیادکردن لە شێوەیەکی گونجاو، چونک بەلای تۆپۆلۆجی چۆنییەتی دانان و پێکەوە لکانی شتەکان گرنگە. بیرۆکە تۆپۆلۆجییەکان بەکاردەهێندرێت لە بەرنامەکانی کۆمپیوتەر و ئاسینەوی بەرنامەکان، هەروەها لە گرافیکی

کۆمپیوتەر بەکاردەهێندرێت. تەنانەت دەتواندرێت بەکاربهێندرێت بۆ چارەسەری چەند کێشەیەک، وەک دامەزراندنی بورجی تەلەفۆن... هتد.









ئەمانە لە دیدی تۆپۆلۆجی هیچ جیاوازییەکیان نییە.

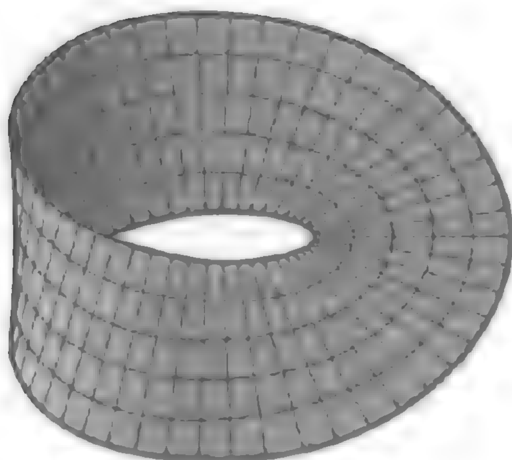
شریتەکەی مۆبیوس

The Möbius strip

شـــــریتەکەی مۆبیـــــوس، بـــــریتییە لە رووەک لەگەڵ یەک لا و یەک لێـوار-قەراغ. ئەم شـریتە شـێوەکەمان دەسـت دەکەوێـت لە کـاقەزێکی شـریتی کاتێـک ئەو شـریتەی هەمـانە پێچێکـی پـێ دەکەیـن پاشـان هەردوو سـەرەکەی بەیەکەوە دەگەیـنـین و دەیبەسـتینەوە. یـانی ئەگەر پـارچە کـاغەزێکی بێنیـت 2 بسـت بێـت و دوو پەنـجە پـانییەکەی بیـت، ئەوە پـێش ئەوەی هەر دوو سـەری کـاغەزەکە بەیەک بگەیەنـی، پێچێـک بە کـاغەکە بـکە پاشـان هەردوو سـەرەکەی بەیەک بگەیـنە و بیبەسـتەوە بە سـمغ یـان تیـب یـان هەر شـتێکی تـــر. شـــریتێکی لەو شـــێوەش نمـــونەیەکە لەو رووانەی کە رێچکەیەکـــی داخـــراوی هەیە، ئەو رێچـــکەیە کاتێـــک شـــتێک لێـــیەوە ڕێ دەکـــات، ئەوە رێچـــکەکە پـــێچەوانەی دەکـــاتەوە! وەک دەبینـــین کە شـــریتی مۆبیـــۆس ئەسـتەمە بڵـێین کـامە نـاوەوەی شـریتەکەیە و کـامە دەرەوە شـریتەکەیە! واتە شریتی مۆبیۆس لە تاک رووەکانە (non orientable).

ئەگەرکەسـێک لە خاڵێـک دەسـت بە رۆیشـتن بکـات لەسـەر شـریتی مۆبیـۆس، کـاتێ دەگـاتەوە شـوێنی دەسـتپێکەکە، دەبینـین هەڵـدەگەڕێتەوە- ســـەرەوخوار! بـــۆیە نـــاوە و دەرەوەی شـــریتی مۆبیـــوس تووشـــی سەرلێشـــێوانمان دەکـــات. پێکەوەنووســـاندنی هەردوو لێـــوارەکەی (edge) شـــریتی مۆبیـــۆس پـــێکەوە بە درێژایـــی شـــریتەکە، شـــتێکی پەیوەندیـــدارمان دەداتـــێ ، ئەویـــش بـــوتڵی کلایـــن (The Klein bottle). ئەم شـــتەش لە

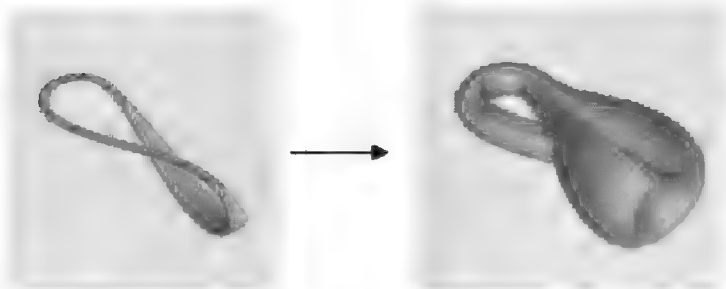
ئـاهوتەی سـێ ڕەهەنـدی ئیقلیـدی شـیاوی ئەنجامـدان نیـیە بەبـێ بڕینـی کـاغەزەکە. بە کـورتی و پـوختی، شـریتەکەی مۆبیـۆس کە وێنەکەشـی لە خوارەوە هاتووە، ڕووەکی تاک لایە و، واتە یەک لای هەیە!

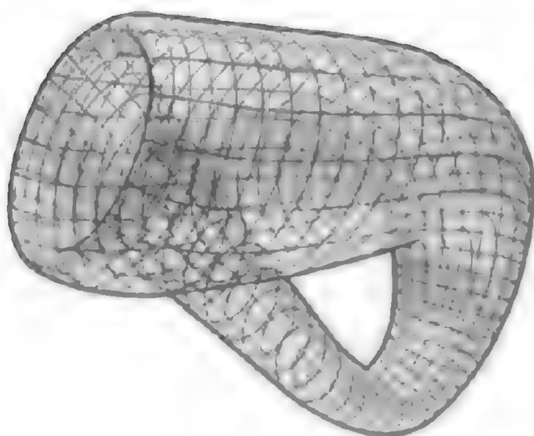


بوتڵەکەی کلاین

The Klein bottle

بـــوتڵەکەی کلایـــن، یەکـــێکە لە ڕووە non-orientable، واتە نـــاتوانین بڕیـــاری ئەوە بـــدەین کـــامە دیـــوی نـــاوەوەی و کـــامە دیـــوی دەرەوەیە، بەجۆرێـک دەکرێـت بڵـێین بـوتڵێکە کە تەنیـا یەک دیـوی هەیە و هـیچ لێـوارێکی نیـیە. ئەم بـوتڵە هەر لە ڕێـگەی شـریتەکەی مۆبیۆسـەوە دروسـت دەکرێـت، کاتێـک هەردوو لێـوارەکەی شـیریتی مۆبیـۆس بـۆ یەک دێنیـنەوە، پاشـان پێکـی دەنووسـێنن، ئەو بوتڵەمـان بـۆ دروسـت دەبێت. ئەم بـوتڵە لە شـوێنێک بە نـاو خۆیـدا تێـپەڕ دەبێـت، کە بـوتڵەکە سـێ ڕەهەنـدی هەیە، ئەوە یەکتـر بڕینێـک دروسـت دەبێـت، بەڵام لە چـوار ڕەهەندیـدا ئەو یەکتـر بـڕینە نامێنێـت. بـوتڵەکەی کلایـن ڕووەکـی داخـراوە، واتە پـتەوە-داپۆشـراوە (compact) و هـیچ سـنور و لێـوارێکی نیـیە. بیرکاریزانەکـان ڕووە داخراوەکـان پـۆلێن دەکەن بە پێـی ژمـارەی کونەکـانی نـاو ڕووەکە، دیـارکردنی ئەوەی کە ئەمە دەکرێـت جیاکـاری لە نێـوان دیـوی دەرەوە و نـاوەوەی بکەیـن یـان نـا؟ واتە orientable.





یاسای ئۆیلەر لە هەمبەر چەند ڕووەکان

Euler characteristic

یاسـای ئـۆیلەر لە هەمـبەر چەنـد ڕووەکـان[92] (polyhedron) یەکـێکە لە یاسـا هەرە جوانەکـانی نێـو بیرکـاری. ئـۆیلەر جـگە لەوەی هاوکێشـەی تریشـی بەنـاوە، وەک هاوکێشـەی: $e^{i\pi} + 1 = 0$. ئەم یاسـایە سـەبارەت بە تەنێکی چەند ڕووە، یاساکە کە بریتییە لە:

$$V - E + F = 2$$

ئەم یاسـایە یەکـێکە لە یاسـا بنچینەییەکـانی نـاو بـابەتی تۆپۆلـۆجی (Topology). چەنـدڕووەکان بـریتین لە تەنێکـی شـێوە داخـراو کە چەنـد ڕووەکـی هەیە (Face)، وە چەنـد لێـوارێکی (Edge) هەیە، لەگەڵ چەنـد سـەرێک (Vertex) ، کە ڕووەکـان بەهـۆی لێوارەکـانەوە دەور دراون و لێوارەکـان بە هـۆی سـەرەکانەوە بەیەکەوە بەسـتراونەتەوە. ئەوەی گـرنگە ئەم هاوکێشـەیەی ئـۆیلەر بـۆ هەمـوو چەنـد ڕووەکـان ڕاسـتە! تەفسـیری یاسـاکە بەم شـێوەیە: ئەگەر تەنێکـی چەنـد ڕوومـان هەبێـت، کاتێـک F ژمـارەی ڕووەکـانی بێـت، E ژمـارەی لێوارەکـانی بێـت، V ژمـارەی سـەرەکانی بێـت، ئەوە هەمیشـە ژمـارەی ڕووەکـان کەم ژمـارەی لێوارەکـان و کۆی ژمارەی سەرەکان، دەکاتە 2، واتە:

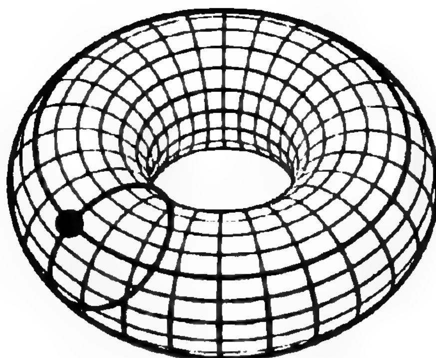
---

[92] لە بنەڕەتـدا "دێکـارت" دۆزەرەوەی ئەم یاسـایە بـوو، بەڵام لەبەر ئەوەی "ئـۆیلەر" سەلمێنەی بۆ کرد، ئەوە بە ناوی ئۆیلەرەوە نرا.

$$V - E + F = 2$$

بـــۆ ڕووە داخروەکـــان (orientable) ژمـــارە کونەکـــان g پێـــی دەوترێـــــت: تـــــوخمی (genus) ڕووەکە، کە ئەمەش پەیوەنـــــدییەکی بە یاساکەی ئۆیلەرەوە هەیە بە پێی هاوکێشەکە:

$$.V - E + F = 2 - 2g$$



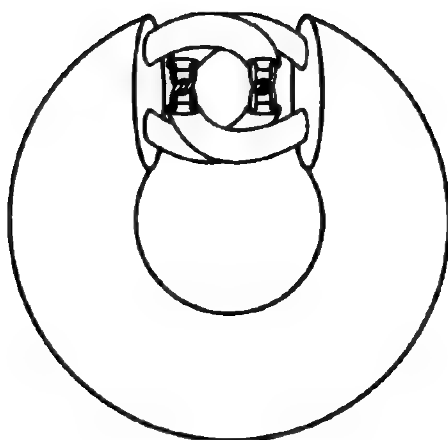
ئەم وێنەیە چووپێک نیشاندەدات، سەرێک ، دوو لێوار و یەک ڕوو.

هۆمۆتۆپی

Homotopy

دوو ڕوو یـــان دوو شـــتی ســـێ ڕەهەنـــدی پێـــان دەوترێـــت هۆمۆتـــۆپی ئەگەر بێـــت و یەکێکیـــان بتوانـــدرێت بگۆڕدرێـــت بـــۆ ئەوەی تـــر، واتە شـــێوەگۆڕکێی پێبکرێـــت بـــۆ ئەوەی تـــر، بەبـــێ ئەوەی ببڕدرێـــت یـــان بەش بەش بکرێـت. بـــۆ نمـــونە: چـــوپێکی تـــایەی ســـەیارە لەگەڵ کـــوپێکی قـــاوە خـــواردنەوە، ئەوە ئەو دوانە لێکچـــوون، چـــونکە هەر یەکەیـــان تەنیـــا یەک کـــونی هەیە، وە یەک ڕوویـــان هەیە، لەبەر ئەوەش بە شـــێوەیەکی بەردەوام دەتوانـــدرێت شـــێوەگۆڕکیان پـــێ بکرێـــت بـــۆ ئەوەی تریـــان. مەبەســـت لە چەمکـی بەردەوام لێـرە واتە ناچـار نەبـین بڕینێـک یـان پارچەکردنێـک بکەیـن بۆ ئەوەی لەم شێوە بگەینە شێوەکەی تر.

بـــابەتی هۆمۆتـــۆپی هەر ســـەر بە تۆپۆلـــۆجییە کە پێشـــتر بـــاس کـــراوە، بەڵام لێـــرە ئەم بـــابەتە ســـوودی لـــێ وەردەگیـــرێ بـــۆ لێکۆڵینەوەمـــان لە نەخشـــەکان، کە لێـرە تێگەیشـتن تۆزێـک لێـی قورسـە بـۆیە باسـی نـاکەین. لە هەنـــدێ بـــاردا، وەک گـــۆی قۆچـــدار (horned sphere) کە لە ســـاڵی 1924 لە لایەن ئەلیکســـاندەر جـــێ (J. W. Alexander) دامێنـــرا کە لە وێـنەکە نیشـــاندراوە، ئەوە شـــتێکی زۆر ســـەمەرە بـــوو، ئەم شـــتە هاوشـــێوەی گۆیەکی دوو ڕەهەندییە لە دیدی تۆپۆلۆجییەوە!



گرووپە سەرەکییەکە

The fundamental group

وەک لە نـــاوەکەییەوە دیــــارە، گرووپــــی ســــەرەکی ئـــاهووتەی تۆپۆلۆجییـانە، بـریتییە لە گرووپێـک لە بونیـادی شـتانێکی بیرکارییـانە لەگەڵ شـتانێکی تۆپۆلۆجییـانە کە تـایبەتە بە کونەکـان و سـنورەکانی ئەو شـتەی هەمـانە. ئەمەش نەگـۆڕە لە ژێـر ڕۆشـنایی هۆمۆتـۆپی[93] (homotopy) کە پشـت قـایمە بەو ڕێگـایەی کە ئەڵقەکـانی سـەر ڕووەک کە بتوانـدرێت شێوەکەی بگۆڕدرێت بۆ شێوەیەکی تر.

ئەڵقەکـان (loops) ڕێچکەیەکـن لە نـاو ئـاهووتەدا، کە خـاڵی کۆتـایی و دەسـتپێکیان نیـیە، واتە خـاڵی دەسـتپێک و خـاڵی کۆتاییـان وەک یەکە. دوو ئەڵقە هاوتـای یەکتـر دەبـن ئەگەر بێـت و بتوانـدرێت یەکێکیـان بگۆڕدرێـت بـۆ ئەوەی تریـان. هەر بـۆیە گرووپـی سـەرەکی، زانیارییەکـان لە هەمـبەر شـێوەکان لە ئـاهووتەدا بە کـۆد دەکـات، کە ئەمەش یەکەمـین و ئاسـانترینی زنجیـریەکە لە گـرووپە هۆمۆتۆپییەکـان کە لەسـەر ئـاهووتە فـرە ڕەهەندییەکان جێبەجێ دەکرێت.

سـادەترین ڕێگـا بـۆ پێناسـەکردنی گرووپـی سـەرەکی، بـرتییە لە جێگیرکردنـی چەنـد خاڵێـک x لە ئاهووتەیەکـدا X وە سـەرنج خسـتە سـەر

[93] دوو نەخشـەی بەردەوام لە ئـاهووتەیەکی تۆپۆلۆجییـانە بـۆ ئـاهووتەیەکی تـر، پێـی دەوترێت هۆمۆتۆپی.

هەمـــوو ئەڵقەکـــان کە لەســـەر خـــاڵە جێگیـــرەکەیە. ئەگەر دوو ئەڵقەمـــان هەبێت، هەر یەکەیـان پـۆلێکی-کـلاس فـراون لە ئلقەکـان پێناسـە بـکەن لە نـاو ئـــاهووتەکەدا، ئەوە دەتـوانین پـــۆلگەلێکی نـــوێ دابڕێـــژین بەهـــۆی شـــوێن کەوتنـی یەک ئەڵـقە، وە پاشـان ئەوانـی تـر. لەم ڕێگـایەدا کردارەکـان لەسـەر ئەڵقەکـــانی پۆلەکـــان دروســـت دەکەیـــن کە ئەمەش گرووپێـــک پێکـــدێنێت. گرووپـــی ســـەرەکی هەر بە نەگـــۆڕی دەمێنێـــتەوە تەنـــانەت ئەگەر بێـــت و ئاهووتەکەش گۆڕانی بەسەر دابێت، واتە شێوەگۆڕکێ بەسەردا بێت.

ئەگەر سـەرنجی چـوێێکی سـادە یـان دۆنـاتەکی ئەڵقەیـی بـدەین، وەک ئـــاهووتەیەک، ئـــێمە چـــوێێکی ســـەیارە هەڵـــدەبژێرین، ئێســـتا ئەگەر خاڵێـــک لەســـەر ئەو چـــووپە دەســـت نیشـــان بکەیـــن: بەهـــۆی ئەو خـــاڵەوە ئەتـــوانین ئەڵـقەک بە دەوری چـوپەکە-چێـوە دروسـت بکەیـن کە ئەو ئەڵـقەیە دەوری کـونەکەی ناوەڕاسـتی چـووپەکە دەدات، پاشـان دروسـتکردنی ئەڵـقەیەک کە بەهـۆی بـوونی ئەو کـونەی لە ناوەڕاسـتی چـوپەکە هەیە؛ ئەڵـقەکە دروسـت دەبێـت: ئەو دوو جـۆرە ئەڵـقەیە هاوتـا نیـنە، وە نـاتوانین یەکێکیـان بۆگـۆڕین بـۆ ئەوەی تـر بە هـیچ شـێوەیەک. پـۆلی سـێیەم لە پـۆلی ئەڵقەکـان، ئەو پـۆلانەن کە دەتوانـدرێت بگەڕێنـدرێنەوە بـۆ خـاڵە ڕەسـەنەکە، کە ئەمـانەش لە گرووپی سەرەکی ناژمێردرێن.

گرووپـی سـەرەکی دەتوانـدرێت بەکاربهێنـدرێت بـۆ ژمـاردنی ئەڵـقە یەک ڕەهەنـدییەکان لە ئـــاهووتەیەکی تۆپۆلۆجییـــانە، لە لایەکـــی تـــر بـــۆ ڕەهەنـدی بەرزتـر گـرووپە هۆمۆتۆپییەکـان دەتوانـدرێت پێناسـبکرێن بە

بەکارهێنـــانی گۆیەکـــانەوە (spheres). لە بنەڕەتـــدا ئەمـــانە ئەو زانیارییـــانە دەســــتەبەر دەکەن لە هەمــــبەر پێکهـــاتەی ئـــاهووتەکە، بەڵام بەداخەوە کە زۆر سـەخت و گـرانە مەزەنـدەکردن و لێکـۆڵینەوە لێـان. تایبەتمەنـدییە سـادە نەگۆڕەکـــان کە زانیارییەکـــان بە کـــۆد دەکەن بە زۆر ڕێگـــای لێکجیـــاواز، کە ئەمانەش پێوستن لە هەمبەر لێکۆڵینەوە لە ڕەهەندی بەرزتر.

ژمارە بێتییەکان

Betti numbers

ژمـارە بیتییەکـان، کـۆمەڵە ژمـارەیەکن کە بە نـاوی بیرکـاریزانی ئیتـاڵی "بێتیـی" کـراوە. ئەو ژمـارانە تەفسـیری سـیمای شـێوە یـان ڕووە تۆپۆلۆجییەکـان دەکەن، کە دەتوانـدرێت هەژمـاربکرێن بەهـۆی بەکارهێنـانی هۆمۆلـۆجی. وەک یاسـای ئـۆیلەر لە مەڕ فـرە ڕووەکـان. ژمـارە بیتییەکـان یارمەتیمـان دەدەن لە پـۆلێنکردنی پێکهاتەکـان بەهـۆی چەنـد سـیفەتێکی سادە و ساکارەوە.

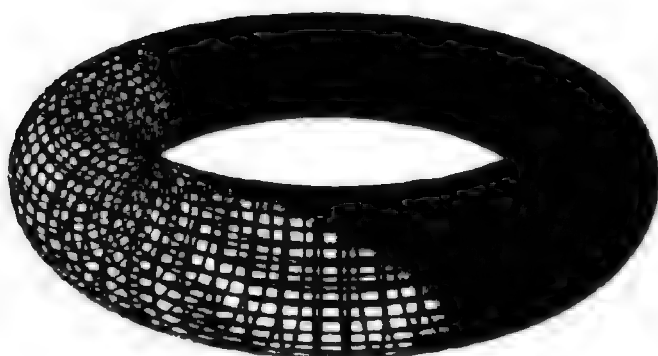
ئەگەر سـەرنجی پـارەچە پەنیرێکـی سویسـری بـدەین، زانیـاری گرنگـی تۆپۆلۆجییانە هەیە، کە ئەمانەیە:

- تەنیـا پـارچەیەکە لە پـارچە پەنیرێـک، کە ئەو پـارچەیە یەک بەشـە و پێکەوە بەستراوەتەوە.

- ئەو پـارچە پەنیـرە n کـونی هەیە، ئەو کونـانە تۆپۆلۆجیـانە جیاوازن و بەراورد نەکراون.

- لە نـاو ئەو پـارچە پەنیـرە، m کـونی شـاراوە یـان بڵقـی شـاراوە هەیە، ئەمەش ژمارە گۆیە سێ ڕەهەندە بەراورد نەکراوەکانن.

ئەم زانیارییـانە، یـان هاوتاکانیـان بە ڕەهەنـدی بەرزتـر، بـریتین لە سـێ یەکەمین ژمارەکانی بێتی لە هەمبەر شتەکە، ئەو شتەی هەمانە.



چــوپێکی لەم شــێوە کە یەک پــارچەی پەیوەســت بە یەکتــرن، دوو کــوونی بــازنەیی، یەکێکــان ئەوەی ناوەڕاســت، وە ئەوەی تــر کە دەکەوێــتە نــاوەوەی چــووپەکە، وە یەک نــاوچەی بەتــاڵی ســێ ڕەهەنــدی. ئەمــانە ســێ لە ژمارە سەرەتاییەکانی ژمارەی بیتیمان پێ دەدات، وەک 1،2،1 .

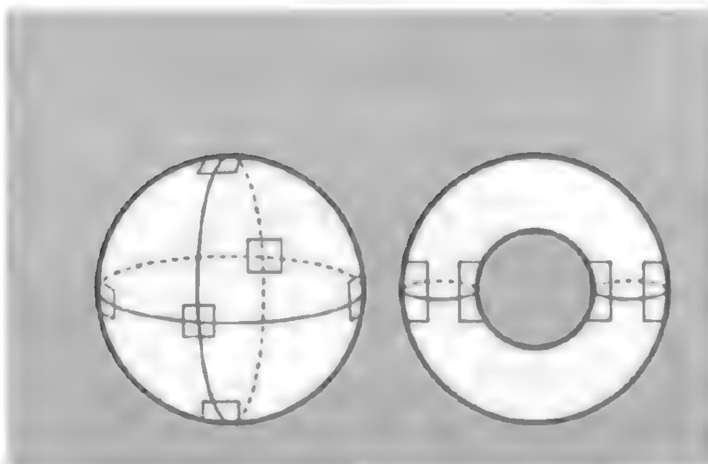
بیردۆزی تورستون

Thurston's geometrization theorem

بیـــردۆزی تورســـتون، بیردۆزێکـــی ڕێـــگە خۆشـــکەربوو بـــۆ پـــۆلێنکردنی ڕووە ســـێ ڕەهەنـــدییە داخراوەکـــان. لە ســـاڵی 1982، "بێـــل تروســـتۆن" 8 پـــۆلی دانـــا کە ناســـراوە بە پـــۆلی فـــرە شـــێوە ســـێ ڕەهەنـــدییەکان (3-manifolds)، کە هەر یەکەیـــان دەتوانـــدرێت بیەســـترێتەوە بە پێناســـە جیاوازەکـــانی دووری لەســـەر ڕووێـــک. تورســـتۆن گریمـــانەی ئەوەی کـــرد کە هەمـــوو ڕووە ســـێ ڕەهەنـــدییەکانی تـــر دەکرێـــت پیـــانبکەین لە ڕێـــگەی بەیەکەوە گرێـــدان (sewing together) ، نمـــونەی ئەمـــانەش 8 جـــۆری بنەڕەتیە.

هەریەک لەو هەشـــــت پـــــۆلە، پەیوەســـــتن بە گرووپـــــی لای. ســـادەترینەکەی بەســـتراوەتەوە بە ئەنـــدازەی ئیقلیـــدی و لە 10 فـــرە شـــێوەی کۆتـــادار پێکهـــاتووە، ئەوانـــی تـــری لە ئەنـــدازەی گـــۆیی و ئەنـــدازی بـــرگەی زیـــاد پێکهـــاتووە، کە بە تەواوی پـــۆلێن نەکـــراون. ئەو ڕێگـــایەی دەتـــوانن لێـــیەوە ڕێکبخـــرێن بەیەکەوە، بـــریتییە لە ڕەنگـــدانەوەی لە پێکهـــاتەی گرووپـــی سەرەکی لە فرە شێوەی سێ ڕەهەندی.

لە ســـاڵی 2003 گریگـــۆری پەرلەمـــان ئەو گریمـــانەی ســـەلماند بە بەکارهێنـــای تەکنیکێکـــی پێشـــکەوتوو کە پێـــی دەوترێـــت: ricci flow بـــۆ دیاریکردنی ئەوەی کەی ئەندازە جۆراوجۆرەکان هاوتای یەکتر دەبن.



ئەم بیـردۆزەی سـەرەوە لە سـەرەتادا گریمـانەیەکی یەکلانەکـراوە بـوو. گریمـــانەکەش ئەوە بـــوو کە ڕووە ســـێ ڕەهەنـــدییەکانی وەک گۆیەکـــان و دۆناتەکان (وەک لە وێنەکە) پێکەوە دەدورێنەوە لە فرە تەنیشتەکان.

گریمانەی پوانکارییە

The Poincare Conjecture

گریمـــانەی پوانکـــارییە، یەکێـــک بـــوو لە پرســـە شـــیکارنەکراوەکان، هەروەهـــا ئەو پرســـیارە لە خشـــتەی ئەو پرســـیارانە بـــوو کە پەیمانگـــای کـــلای بیرکـــاری خەلاتـــی یەک ملیـــۆن دۆلاری بـــۆ تەرخـــان کردبـــوو (ئێســـتاش). گریمـــانەی پۆانکـــارییە یەکەم پرسـیاری ئەو خشـتەیە بـوو کە شـیکار کـرا لە لایەن **گیریگـــۆری پەرلیمـــان** لە ســـالی 2003. پرســـەکە بە دەســـتەواژەی ئاسـان دەڵێـت: **هەمـوو فـرە شـێوە سـێ ڕەهەنـدییە داخراوەکـان بـێ بـوونی هـیچ کونێـک لە نـاو شـێوەکە، ئەوە تۆپۆلۆجیـانە هاوتـای گـۆیەکی سـێ ڕەهەندی دەبن.**

ئـــاهووتەیەک هـــیچ کـــونێکی نیـــیە ئەگەر بێـــت و هەر ئەڵـــقەیەک لەگەڵ خاڵێـــک ببەســـترێت، بـــۆیە گرووپـــی ســـەرەکی لەم دۆخە شـــتێکی چـــاوەڕوانکراوە. لە ئـــاهووتەی دوو ڕەهەنـــدی، تـــاکە ڕوو لەگەڵ ئەو تایبەتمەنـــدییە بگونجێـــت، ڕووە گـــۆییە تۆپۆلۆجییەکـــانە. لە ســـالی 1904، **هێنـــری پوانکـــارییە** گریمـــانەی ئەوەی کـــرد، کە ئەمە لە ئـــاهووتەی ســـێ ڕەهەنـدیش ڕاســـتە. بـابەتە گـرینگەکە ئەوە بـوو: ئـاخۆ فـرە ڕووەکـی سـێ ڕەهەنـدی دەشـــێت هەبێـــت بەڵام گـــۆ نەبێـــت؟ پەرلیمـــان ســـەلماندی کە بیـــردۆزی thurston's geometrization theorem لەدەرەوەی ئەم ئەگەرە بەکارەکە هەڵدەستێت.

هاوشــــێوەکانی گریمــــانەکەی پوارنکــــارییە بــــۆ ڕەهەنــــدی بەرزتــــر بە زوویــی ئەواتــیش پێــداچوونەوەیان بەســەردا کــراو شــیکارکرانەوە. کێشــەی 5 ڕەهەنــدەکە لە ســاڵی 1960 ئەویــش لە لایەن «ســتیفن ســمالی»، دوایــی مــاوەیەک پێشــکەوتنی بەخــۆییەوە بینــی لە لایەن مــاکس نیومــان. لە بــارودۆخی 4 ڕەهەندیــدا لە لایەن "وکایــل فریــدمان" ئاراســتە کــرا لە ســاڵی 1982.

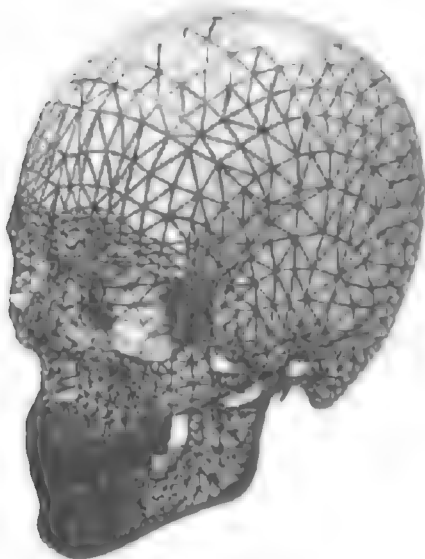
هۆمۆلۆجی

Homology

هۆمۆلـــۆجی، بـــریتییە لە ڕێگـــایەک بـــۆ پێـــوانی کونەکـــان لە نـــاو ئـاهووتەیەکی تۆپۆلۆجییـانە. هۆمۆلـۆجی بە دوای دەسـتە-پـۆل شـتێکە لە نـاو ئـاهووتەکە، کە ئەو دەسـتەیە سـنووورێکیان نیـیە، سـنوری شـتانێک لە تـوخمی یەکتر، بەم جۆرە، دیارکردن و ناسینەوەی کونەکان.

گـــرووپە هۆمۆلۆجییەکـــانی ئـــاهووتەیەک، دەتوانـــدرێت هەژمارییـــان بکەیـــن بە هـــۆی بە سێگۆشـــەکردنی کۆمەڵەکـــان: واتە شـــێوەگۆڕییەک لە ڕووەکە بـۆ سـەر، لێـوار، ڕوو ، قەبـارە چـوار ڕووەکـان... بەم شـێوە بـۆ ڕەهەنـــدی بەرزتـــر. وە مەبەســـت لێـــرە گـــۆڕینی ڕووەکە بـــۆ چەنـــدین سێگۆشـــەی بچـوک بچـوک، ئەمـانەش دەتوانـدرێت ڕێکبخـرێن بـۆ فـۆرمی پێکهـــــاتەی گرووپێـــــک بە بەکارهێنـــــانی کـــــرداره ســـــنورییەکان (boundary operations)، کە ئەم گـــرووپەش تەفســـیری ڕووەکـــان دەکـــات بـــۆ لایەکـــانی. یەکێکـــی تـــر لە ڕێگاکـــان، پێـــی دەوترێـــت (cohomology) لە ڕەهەنـدە نزمەکـانەوە، کە بەشـە ڕەهەنـدە بەرزەکـان دروســـت دەکـــات. بە پشـــت بەســـتن بە کێشـــەکە، لەم ڕێـــگەیەوە کێشـــەکە مـــومکینە ئاســـنتر شـــیکار بکرێـــت وەیـــان ئەنجـــامێکی ڕوونتـــر دەســـتەربەر بکات.

گـــرووپە هۆمۆلۆجییەکـــان زۆر ئاســـانترن بـــۆ مـــامەڵەکردن لە تەک گـــرووپە هۆمۆتۆپییەکـــان-homotopy. لەگەڵ ئەوەش، چـــونکە هەنـــدێ کـــونی ورد و بچـــوک هەن کە هۆمۆلـــۆجی بایەخیـــان پێنـــادات، لەبەر ئەمەش هۆمۆتۆپی مومکینە تا ئێستاش پێویست و گرنگتر بێت.

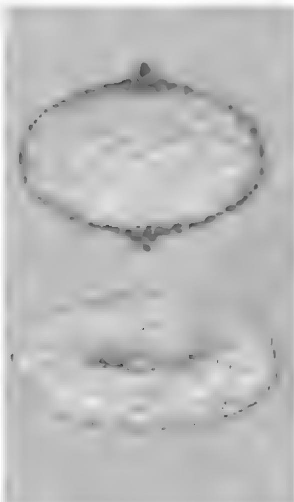


ڕووی کەلەســـەرەکە شـــیکۆرکێی پـــێ کـــراوە بـــۆ سێگۆشـــەی بچـــوک بچوک.

چەپکە ئاراستەبرەکان

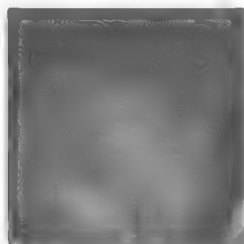
Vector bundles

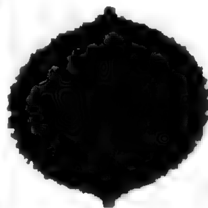
چەپـــکە ئاراســـتەبرەکان، ڕێگـــایەکە بـــۆ ســـەرنجدان لە پێکهـــاتە تۆپۆلۆجییەکـــان، کە لەســـەر ڕووێـــک پێنـــاس کـــراوە، تەنـــانەت بـــۆ دیـــوی ناوەوەشـــی. پێناســـەکردنی چەپـــکە ئاراســـتەبر، لەســـەر ڕووەک ئـــاهووتەی ئاراســـــتەبرەکان لەخـــــۆی دەگرێـــــت، واتە لە ڕێـــــگەی ئـــــاهووتەی ئاراســـتەبرەکانەوە ســـەیری ڕووە تۆپۆلۆجییەکـــان دەکەیـــن لە هەر خـــاڵێکی ســـەر ڕووەکە. ئەمەش بەهـــۆی هەڵبژاردنـــی دانەیەکـــی تـــایبەتی لە ئـــاهووتەی ئاراســـتەبرەکان کە پێـــی دەوترێـــت ڕیشـــاڵ یـــان تـــاڵ (fiber) لە ڕێـــگەی ئەم ڕیشـــاڵانەوە لە هەر خـــاڵێکی ســـەر ڕووە تۆپۆلـــۆجییەکە دەڕوانـــین، دوای ئەمەش کە ئاراســـتەبری مەیـــدانی دروســـتکراوە، کە دەتوانـــدرێت پیشـــانبدرێت بە پێـــی ئاراســـتە برێکـــی ســـتوونی یـــان ئاســـۆیی لە هەر خاڵێـــک. چەپکەکـــان کـــۆمەڵەیەکی بەنرخمـــان پـــێ دەدات، لە ڕێـــگەی ئەم کـــۆمەڵەوە تەفســـیری فرەڕووەکـــان دەکەیـــن. یاســـای ئـــۆیلەر و ژمـــارەی ئـــۆیلەر بـــۆ چەنـــد ڕووەکـــان بە سروشـــتیانە لەم بـــابەتە ســـەرهەڵدەدات، وەک ژمـــارەی یەکتربرینـــی خـــۆیی کە ســـەبارەت بە ســـفرەکانی ئاراســـتەبرەکان زانیاریمـــان دەداتـــێ لە ســـەر ڕووەک. ئەگەر بێـــت و ســـفر نەبێـــت،



ئەوە هەر مەیدانێکی بەردەوامی ئاراستەبڕ لەسەر فرەڕووەک دەبێت سفرێکی هەبێت لە شوێنێکی سەر فرە ڕووەکە. ئەم بارەش زۆر جار پێی دەوترێت بیردۆزی تۆپی تووکن (hairy ball theorem)، کە تاڵەکان ئاراستەبڕەکان دەنوێنن لەسەر فرە ڕووەک، وە بوونی سفریش، ئەو راستییە دەنوێنێت کە هەر ڕێگایەک لە پێکەوەلکاندنی تاڵەکان بە بڕ لێکدانەکان، ئەوە بەلایەنی کەم تاجێک-crown (یان تاجە گوڵینەی پێ دەڵێن) بەرهەمدێنن.

وادانێ کەلەسەری ئەو منداڵەی خوارەوە وەک فرە ڕووەک-(manifold) سەیر بکەین. هەر خاڵێکی-(point) سەری منداڵەکە؛ واتە هەر مووە خانەیەک بە خاڵێکی سەر فرە ڕووەکەی ببینین. ئەوا: هەر مووە خانەیەک ئاراستەبڕێکە-(vector)، وە کەلەسەری منداڵەکە بریتییە لە چەپکێک ئاراستەبڕەکان-(vector bundles) ئیتر لە ڕێگەی مووەکانی سەری منداڵەکە لە پێکهاتە و شێوازی ئاراستەی مووە خانەکە دەگەین، لەکاتێک بەبێ بوونی موەکانی سەری بە ئاسانی ناتوانین. هەر لەم ڕووەوە، یەکتر بڕینی ئاراستەبڕەکان تێبینی دەکەین [94].





[94] وەرگێڕ.

تیۆری k

K-theory

تیـۆری k لە دەوروبەری سـاڵی 1950 گەشـەی سـەند. ئەم تیـۆرییە ڕێگـایەکی دەسـتەبەرکرد بـۆ جیـاکردنەوەی چەپـکە ئاراسـتەبڕەکان لەسـەر فـرە ڕووەک، بـۆ چەنـد پـۆلێکی جیـاواز، ئەوانـیش گـرووپ و تیـۆری ئەڵقە. ئەم پـۆلێنکردنە ڕێگـایەکی تـر بـۆ بـۆ زانینـی ژمـارەی کونەکـانی نـاو ڕووەکـی تۆپۆلۆجییانە.

ئەم تیـــۆرییە هـــاوتەرییە لەگەڵ چۆمۆلـــۆجی (Chomology)، دەتـوانین بڵـێین وردتـر و ڕێکتـرە لە چۆمۆلـۆجی. کە ئەمەش ئـامرازێکی زۆر بەســوودی سـەلماندووە لەگەڵ بەکارهێنـانی لە هاوکێشـە جیاکارییەکـان، هەروەهـا ئەمەش ڕێگـایەک بـووە بـۆ پێشـکەوتنی مەیـدانی ئەنـدازە نـا-ئالوگۆڕەکـان (Noncommutative geometry). ئەنـدازەی ئاموتەکـان کە وەسـفە جەبرییەکانیـان سـیفەتی نـا-ئـالوگۆڕین، بە واتـایەکی تـر، کاتێـک xy ≠ پێویسـت نیـیە بکـاتەوە yx. لە فیزیـای تیـۆری، تیـۆری k ڕۆڵێکـی زۆر گرنـگ دەگێڕێـت لە هەنـدێ تیـۆر، وەک: تیـۆری سـترینگەکان (string theories) کە هەوڵـێکە بـۆ وەسـفکردنی تۆنـۆلکە سـەرەکییەکانی گەردوون، وەک: سترینگە فرە ڕەهەندەکانی لەرینەوە:

(Vibrating multidimensional strings)



تیۆری گرێ

Knot theory

گـــرێ، لە بیرکاریـــدا بـــریتییە لە چەمـــاوەیەکی داخـــراوی تێکئـــالاو لە ئـاهووتەی ســێ ڕەهەنــدی، دوو یــان زیــاتر چەمــاوەی لەم شــێوە ناســراون وەک ئەڵـــقە یـــان زنجیـــرە ئەڵـــقەیەک. تیـــۆری گـــرێ، مەبەســـت لە تەفسـیرکردن و پـۆلێنکردنی گرییەکـانە، وە ســەرنج خســتنە ســەر ئەوەی کە دەبێـت چـۆن بنوێنـدرێت، یـان ئەو یاسـایە چییە کە لێکیـان جیـا دەکـاتەوە. لەم بـابەتە گرییەکـان دەکرێـت هاوتـای یەکتـر بـن ئەگەر بێـت و چەماوەکانیـان بتوانـدرێت بە شـێوەیەکی بەردەوام شـێوەگۆرکێی پێبکرێـت بـۆ ئەوەی تریـان بـــێ ئەوەی بـــڕین و دڕیـــن تێـــدا بەکاربهێنـــدرێت. ســـەرەڕای ئەوەش، بەراوردکردنـــی گرییەکـــان هێشـــتا کـــارێکی وەهـــا ئاســـان نیـــیە و وەڵامێکـــی وردی نیـــیە. لێـــرەش لە هەمـــبەر نەگـــۆڕاوە گرییەکـــان ژمـــارەک هەیە، تایبەتمەنـــدییەک، کە وەک یەکە بـــۆ هەمـــوو گرییەکـــان ، کە دەســـتکاری نەکـراون بەهـۆی شـێوەگۆرکێوە. بەڵام بەهەمـوو ئەو بـارانەی کە زانـراون، چەنـــدین جـــۆری جیـــاوازی لە گرییەکـــان هەن کە دەکرێـــت هەمـــان تایبەتمەنـدی گرییـان هەبێـت، بـۆیە ئەوانـیش دەستنیشـان نەکـراون. مەبەسـت لە نەگۆڕاوە گرێ، ئەو گرییانەن کە هاوتای یەکترن.

تیـۆری گـرێ گـرنگە لە زانسـتی زینـدەزانی بـۆ وەسـفکردنی پێچەکـان و شـــێوەی DNA کە پەیوەنـــدی بە پرۆتینەکـــانیش هەیە. هەروەهـــا ئەم تیـۆرییە لە ڕەهەنـدە نزمەکـانی سیسـتەمی داینەمـیکەڵ-جـووڵەیی بەکاردێـت

کە بـۆ دیـارکردنی ئەوەی کە چـۆن دەتوانـدرێت خـولگە دەورییەکـانی هەنـدێ لە هاوکێشە جیاکارییەکان یەکتر ببڕن.



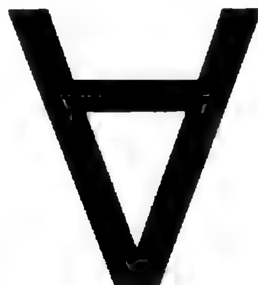
لەم وێنەی سەرەوە جیاوازی نێوان گرییەکان بە ڕوونی دیارە.

بەشی دوانزەهەم

ژیربێژی و سەلماندن

Logic and proof

∀♂ ∈🌎, ∃♀ ∈🌎 *s.t* ♂ + ♀ = ❤



لۆجیک-ژیربێژی و بیردۆز

Logic and theorem

"هەرکە مەحـــاڵ ڕیشـــەکێش دەکەی، هەر چیـــیەک کە دەمەێنێـــتەوە وەڵامەکەیە، شتێکی ڕێتێچوویە." (شیرلۆک هۆڵمس)

لە ســـەرەتادا دەبێـــت جیاکـــاری بکەیـــن لە نێـــوان لـــۆجیکی نـــوێ و لـــۆجیکی هـــاوچەرخ-بیرکـــاری، مەبەســـت لە لـــۆجیکی هـــاوچەرخیش لـــۆجیکی هێمـــاییە، وەک "بێرتراننـــد ڕاســـڵ" لە پەرتـــوکی "پرنســـیپیا ماتماتیکـــا" دەڵێـــت: "لـــــۆجیکی هێمـــــایی خوێنـــــدنەوەیەکی جیـــــاوازە جـــــۆرە گشـــــتییەکانی بەڵگەهێنـــانەوە". بەڵام "دەیڤیـــد هیڵبێـــرت" لە پێناســـەی بـــۆ لـــۆجیکی نـــوێ دەڵێـــت: "بـــــریتییە لە جێبەجێکردنـــــی میتـــــۆدی فۆرمـــــاڵی بیرکـــــاری لە بوارەکـــــانی لۆجیکـــدا".[95] بەڵـــگە بیرکارییەکـــان، بـــۆ ڕاســـتی دروســـتی دەقێکـــی بیرکارییـــانە، لە پاســـــاکانی لـــــۆجیکەوە ســـــەرچاوە دەگـــــرن. ئەوە دەردەخەن کە چـــــۆن دەســـــتەواژە بیرکارییەکـــــان (statement) لە مەڕ تایبەتمەنـــدییەکانی شـــتێکی بیرکارییـــــانە دەتوانـــــدرێت بەکاربهێنـــــدرێت، بـــــۆیە ئەگەر دەســـــتەواژەیەکی ســـەرەتایی ڕاســـت بێـــت، ئەوە هەرچـــی لەســـەر ئەو دەســـتەواژانەوە ســـەرئاو دەکەون، ئەوانـــیش هەر ڕاســـتن. بەڵام ئەمە تەنیـــا دەســـت تێـــوەردانێکی وەهـــا ســـادە و ســـاکار نیـــیە، تایبەتمەنـــدییەکان و شـــتەکان لە بیرکاریـــدا، لەگەڵ ئەوەی شـــتانێکی ڕووتـــن-پەتـــین، بەڵام پێویســـتیان بە پێناســـەکردن و

[95] لـــۆجیکی کـــۆن و هـــاوچەرخ. د. حســـن حســـێن جەبـــاری. 2015. دەزگـــای چـــاپ و پەخشـــی نارین-هەولێر.

ناسـاندنێکی فەرمـی هەیە. بیرکـاری زانسـتێکی ڕووخسـارەکییە، بـۆیە پشـتی بە دیدەکشـن بەسـتووە، واتە لە یاسـا گشـتییەکانەوە، بـاس لە شـتە هەنـدەکییەکان دەکەیـن، بـۆیە تـا هەنـووکەش هەنـدێک دەقـی بیرکـاری هەن (وەک کۆنجێکتەرەکـان) بـۆ هەزاران و ملیۆنـان ژمـارە شـتەکە ڕاسـتە، بەڵام لەبەر ئەوەی بە شـێوەیەکی گشـتی شـتەکە یەکلانەکـراوەتەوە، ئەوە هەر گوومـانی لەسـەرە. بە شـێوەیەکی نمـونەیی، بیرکـاری بە کۆمەڵێـک شـتی سـەرەتایی دەسـت پێـدەکات، وەک: بەڵـگە نەویسـتەکان، کە تایبەتمەنـدی ئەو شـتە سـەرەتاییانەن. دەسـتەواژەی ئـاڵۆزتری بیرکاریـانە لە بەکارهێنـانی ئەو یاسـا ژێربێژییـانە بینادەکرێـت، وەک: سیسـتەمی بەڵگەنەویسـتی، سیسـتەمی ئەنـدازەی ئیقلیـدی و تیـۆری کـۆمەڵە. لە پێناسـەکان و چەمکەکـانەوە زۆر جـار شـتانێک دروسـت دەکەیـن ئەسـڵەن وەڵامەکەی بە وردی نـازانین، وەک لەسـەرەوە ناومـان هێنـان (conjectors)، کـۆنجێکتەر ئەو دەقە بیرکـارییەوە پێـدەچێت ڕاسـت بێـت، بەڵام هـیچ سـەلماندنێک بـوونی نیـیە تـا پشـت ڕاسـتی بکـاتەوە، واتە نەتوانـدراوە بسـەلمێندرێت، یـانیش ناتوانـدرێن دژە نمـونەیەک بـدۆزرێتەوە کە دەقەکە بە هەڵە بخـاتەوە. کـۆنجێکتەر ئەگەر تـوانرا سـەلمینەی بـۆ بکرێـت، ئەوە دەبێـتە بیـردۆز. بیرکـاریزانی هەنگـاری 'پـۆل ئیـدوارس'[96] لە وەسـفی بیرکاریزانەکـات دەڵێـت : **وەک ئـامێرێکن بـۆ گـۆڕینی قـاوە بـۆ بیـردۆز.** بە کـورتی و پـوختی: ژێربێـژی-لۆجیـک بـریتییە

[96] 'پـۆل ئیـردۆس' بیرکـاریزانی هەنگـاری بـوو، کە یەکێـک بـوو لە بیرکـاریزانە هەرە چالاکەکـان و بەتـایبەت لە تیـۆری ژمارەکـان، کە بە هەمـوو ژیـانی خەریکـی بیرکـاری و پەزلـی بیرکـاری بـووە و زۆرتـرین ژمـارەی تـوێژینەوەی هەبـووە. لە وتەیەکـی دەڵێـت: "هەمـو شت کۆتایی دێت، تەنها ژمارە بە نەمری دەمێنێتەوە."

لە ڕێسا گشتییەکانی دروست بیرکردنەوە، کە بابەتەکەی بریتییە لە پێناسە و بەڵگەهێنانەوە. فێرمان دەکات چۆن پێناسەی شتەکان بکەین و بەڵگە بۆ دروستی شتکە بێنینەوە یان چۆن شتێک بە درۆ بخینەوە. کەواتە بیرکاری بناغەکەی بریتییە لە لۆجیک، وە بگرە لۆجیکێکی زۆر پێشکەوتووە. بیردۆزیش دەقێکی سەلمێندراوە، کە دەرگای گفت و گۆی لەسەر داخراوە، وە پاک کراوەتەوە لە تۆزی گومان. بیردۆز[97] بە گشتی باسی دیاردەیەک دەکات. بۆ نمونە: **کۆکردنەوەی دوو ژمارەی جووت، ئەنجامەکەی هەر دەکاتەوە ژمارەیەکی جووت.** واتە پێویست ناکات بێین دوو، دوو ژمارە بێنین تاقیبکەینەوە بۆ ئەوەی بزانین؛ ئەرێ دەکاتەوە ژمارەی جووت؟ ئەمە واتا چی؟ واتە بیرکاری پشت بە زانیارییە هەندەکییەکان-بەشی نابەستێت بۆ گەیشتن بە ئەنجامێکی هەمەکی-گشتی، کە ئەمەش پێچەوانەی زانستە سروشتییەکانە، وەک فیزیا، کە لە زانیارییە هەندەکییەکان بەرە و یاسا هەمەکییەکە دادەکشێت، واتا پشت بە (استقراء) دەبەستێت[98]. لەگەڵ هەموو ئەمانەش، ڕاستی بیرکاری، ڕاستییەکی جێگیرە و گۆڕانی بەسەردا نایەت، وەک چۆن تیۆری لە زانستە سروشتییەکان دەکرێت شۆڕشی بەسەردابکرێت و تیۆرییەکی باشتر بێت شوێنی تیۆرییەکەی پێش خۆی بگرێتەوە! ئەم شۆڕشە، لە زانستی

---

[98] 'جۆن. ب کۆنوای' لە شوێنێک دەڵێت: 'بیرکاری، بۆ من بریتییە لە هۆبە-کۆمەڵە نمونەیەک؛ بیردۆزەکانیش دەربڕینێکن-دەستەواژە لە هەمبەر نمونەکان، مەرامیش لە سەلماندنی بیردۆزەکان؛ پۆلێنکردن و ئاوەڵەکردنی نمونەکانە.

فۆرمالّی بیرکاری بوونی نییە، واتە هیچ کاتێک شۆڕش بەسەر ڕاستییەکی بیرکاریدا ناکرێت. بەلّام یەکێک لە مەرجەکانی تیۆری لە زانستە سروشتییەکان، ئەوەیە کە دەبێت ئەو تیۆرییە ئەگەری هەلّە بوونی لە ناو هەناویدا هەلّگرتبێت.[99]

[99] محسین برهان- بۆدکاستی چاوگ (تەقینەوە مەزنەکە).

سەلماندن

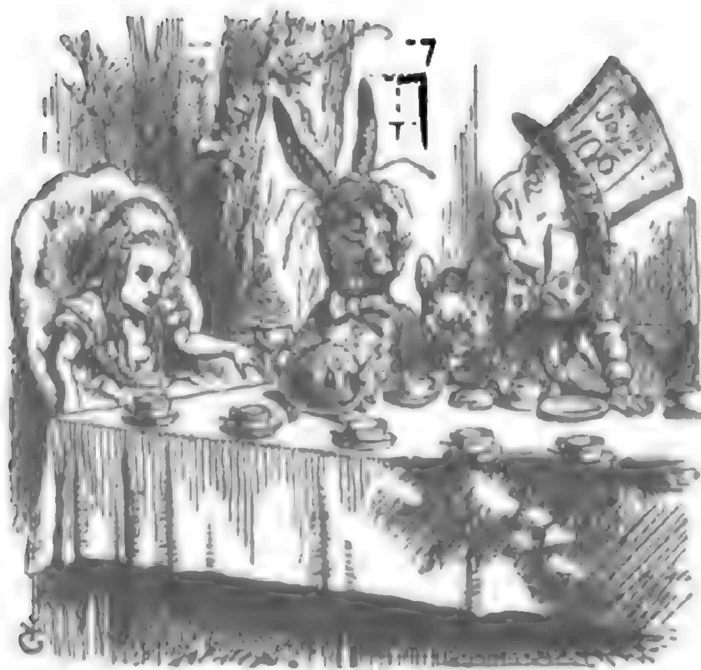
Proof

سەلماندن، لە سادەترین پێناسە بریتییە لە بەڵگەیەک (argument) کە راستی و دروستی ئەنجامێک پشت راست دەکاتەوە، نەک تەنیا لە پشت گومانێک، بەڵکو لە پشت هەموو گومانەکان. یاخود پێوانەنێکە کە پێکهاتووە لە چەند پێکهاتەیەکی تێکهەڵکێشراوی یەقین بەخش، بۆ دەست خستنی دەرئەنجامێکی یەقین.[100] ئامانج و بنەماکەش هەر ئەمەیە. لەگەڵ ئەوەشدا، نە پەیوەستە بە شوێن، نە پەیوەستە بە کات! کات لە پشت سەلماندنە بیرکارییەکان هیچ گرنگییەکی نییە. ئیقلید بەر لە 300 پێش زاین، چەندین بیردۆزی سەلماند، زانیشی تا دونیا ماوە، ئەو بیردۆزانە هەر بە راست دەمێنەوە! لە راستیدا میتۆدی سەلماندن دەگەڕێتەوە بۆ گریک، ئەوان دەیانزانی شتێک راستە، بەڵام دەیانپرسی؛ بۆ چی راستە؟ بۆیە ئەمەش بە پێچەوانەی میسرییەکان و بابلییەکان بوو، ئەوان یاری سەلماندن نەبوون، واتە نەیاندەزانی بۆچی بیردۆزێکی وەکو بیردۆزی فیساگورس راستە؟ بۆیە گریکەکان بە دوای ئەو وەلامی ′بۆچی ″یییەوە بوون، کە وەڵامەکەشیان دەستکەوت لە ڕێگەی بەکارهێنانی ئەقل و لۆجیکەوە.

---

[100] زانستی لۆجیک. کەمال ئەمین گوڵپی. 2018. خانەی چاپ و پەخشی ڕێنما-سلیمانی.

بـۆ ســەلماندنی دەقێـک یـان یاسـایەکی گشـتی بیرکارییـانە، چەنـدین ڕێگـای جیـاواز هەن، بە جۆرێـک هەنـدێ لە ڕێگایـانە بـۆ ســەلماندنی دەقێـک کەم یـــان زۆر دەســـت نـــادەن. لەگەڵ ئەمەش، یەکێـــک لە جوانییەکـــانی بیرکـاری بـریتییە لە دۆزینـەوەی ئاسـانترین و جـوانترین ڕێگـا بـۆ گەیشـتن بە ئەنجـام. سـەرەڕای ئەمەش، چەنـدین کێشـە هەن، کە بیرکارییەکـان نـازانن بە چ میتۆدێک بۆ گژ ئەو کێشانە دابچن؟!



سەلماندنی ڕاستەوخۆ

Direct proof

لە بابەتی پێشوو وتمان چەندین ڕێگا و شێوازی جیاواز هەیە بۆ سەلماندنی ڕاستییەک، یەکێک لەو ڕێگایانە بریتییە لە سەلماندن بە شێوەیەکی ڕاستەوخۆ. ئەم ڕێگایە سادەترین جۆری سەلماندنە، ئەمەش کاتێک بەکاردێت کە هیچ ڕێگرییەک لە هەنگاوەکانی سەلماندنەکە بەرۆکمان نەگرێت. هەڵبەتە ئەم ڕێگایە بۆ سەلماندنی هەموو ڕاستییەک دەست نادات، بۆیە، بۆ ئەوەی دەقێک بە سەلماندنی ڕاستەوخۆ ڕاستییەکەی دەربخەین، ئەوە پشت بەو دەقە دەبەستێت کە هەمانە، وەک: ناوبەند و یەکەکانی دەقەکە. سەلماندنی ڕاستەوخۆ زنجیرەیەک لە هەنگاوی لۆجیکییە لە دەستە گریمانەیەکەوە[101] بۆ دەرئەنجامێکی ویستراو. لەگەڵ ئەوەش، تا ڕادەیەک ناهەموار و بێزارکەرە نووسینی هەموو هەنگاوە سەرەتاییەکانی سەلماندنێک لە بەڵگەنەویستە سەرەتاییەکانی بابەتێک بە هەموو وردەکارییەکانەوە، بۆیە سەلماندنی ڕاستەو خۆ تاڕادەیەک ڕێگاکەی کورت-قەدبرە. زۆر جار لە ڕێگای سەلماندنی ڕاستەوخۆ زۆر شتی ئامادەکراو هەیە بەکاری دەهێنین، وەک:

---

[101] ڕەنگە یەکێک بپرسێت، بۆچی لە گومانەوە دەست پێ دەکەین، گریمانەکە لەسەر چ بنچینەیەک دروست دەکەین؟ دروستکردنی گریمانە ئەویش هەر بەهۆی لۆجیکەوەیە، واتا ناکرێت بێن بە کەیفی خۆمان گریمانە دروست بکەین، بۆ نموونە گریمانەی لەم شێوە: ئەگەر 1=2 ، ئەوە .... ئەسڵەن هەر ئەنجامێک لەمە بکەوێتەوە هەڵەیە، چونکە گریمانەکە خۆی هەڵەیە. چونکە یەکێک لە یاساکانی لۆجیک ئەوەیە لە گریمانەی هەڵە (پێشەکی هەڵە)، ئەنجامی ڕاستی لێ ناکەوێتەوە.

بیردۆزێکی پێش خۆی، یان لیمایەک[102] یان بەهۆی پێناسەکانەوە. بەڵگە ستانداردەکان–نمونەییەکان لە سەلماندنی راستەو خۆ بریتییە لە کۆمەڵێک رێسای سادەی هەڵنجهێنان، کە ئەو تەکنیکانە ناسراون بە بەندە لۆجیکییەکان. بۆ نمونە: دەمانەوێت دەستەواژەی Q بسەلمێنین. ئەگەر توانیمان بناغەیەک دانین کە ئەگەر P راست بێت، ئەوە Q یش راستە، واتە $P \to Q$ ، لێرە بۆ دەستەواژەی P ئەوە حەتمییەن شتێک هەیە راستە، کە ئەگەر بێت و لەو دەستەواژەیە راستی دەستەواژەی Q دەربخەین، ئەوە کەواتە Q راستە.

نمونە: دەمانەوێت بیسەلمێنین کە؛ دووجای هەر ژمارەیەکی جووتی ئەرێنی دابەشی 4 دەبێت.

ئێستا ئێمە شتێکمان هەیە بەکاری دێنین، ئەویش ژمارەیەکی جووتی ئەرێنی، لەبەر ئەوەی هەموو ژمارەیەکی جووتی ئەرێنی بە پێی پێناسەی ژماری جووت، لەسەر شێوەی 2n دەنووسرێت، کاتێک n ژمارەی ئەرێنی سروشتییە. ئێستا 2n ژمارەیەکی جووتە بە پێی پێناسەی ژمارەی جووت (بناغەیەکمان دروستکرد). ئێستا دێین دووجای دەکەین: $(2n)^2 = 4n^2$ دیارە دووجای لای چەپ دەکاتە ئەو بڕەی لای راست

[102] لیما (Lemma) لە خزمەتی بیردۆز بەکاردێت. وەختێ لە سەلماندنی بیردۆزێک دەگەینە هەنگاوێکی قورس، ئەوە دەچین لە دەرەوەی بیردۆزەکە ئەو هەنگاوە قورسە بەجیا دەسەلمێنین، پاشان لە ناو بیردۆزەکە خۆمان لە هەنگاوە قورسەکە نەجات دەدەین بە ناو هێنانی لیماییەکە.

$4n^2$ کە دیـــارە ئەو ڕادەیەش هەمیشـــە دابەشـــی 4 دەبێـــت.[103] ■ بـــۆیە گەیشـــتینە ئەوەی هەمـــوو ژمـــارەیەکی جـــووتی ئەرینـــی دابەشـــی 4 دەبێـــت. ئەمە مـــومکینە ئاســـان و ســـادە بێـــت، بەڵام ســـەلماندنی ڕاســـتەوخۆ بنـــاغەی زۆرێـــک لە ســـەلماندنەکانی تـــرە لە بیرکاریـــدا. هەمـــوو میتۆدەکـــانی ســـەلماندن ئەوەنـــدە ئاســـان نـــین بەو شـــێوەی ســـەرەوە، بۆنمـــونە ســـەلماندن بەهـــۆی هێڵکارییەوە، سەلماندن بەهۆی ئیندەکشنەوە.

لێـــرە دەســـتەواژەی P بـــریتییە لە ژمـــارەیەکی جـــووتی ئەرێنـــی کە بە پێـــی پێناســـە دەتوانـــدرێت بە ئەنجـــامی لێکـــدانی 2 و ژمـــارەیەکی ئەرێنـــی سروشـــتی بنووســـرێت، وە دەســـتەواژەی Q بـــریتییە لە دووجـــای ژمـــارەیەکی جووتی ئەرێنی کە دابەشی 4 دەبێت.



[103] ئەو هێمایە ■ واتە سەلماندنەکە بەکۆتا گەیشت.

سەلماندن بە هۆی لێکدژییەوە

Proof by contradiction

سەلماندن بەهۆی لێکدژییەوە، یەکێکە لە میتۆدە هەرە جوانەکانی سەلماندن لە نێو بیرکاریدا. لەم میتۆدەی سەلماندنەدا، مومکینە سەلماندنی راستەوخۆ بۆ دەقێک کارێکی وەها ئاسان نەبێت، وە لەبەر ئەوەی ئێمە بۆ هەر دەقێکی بیرکاری، واتە بۆ هەر دەستەواژەیەکی بیرکاری، دوو وەلام هەیە؛ یان راستە یان هەڵەیە. ئێمەش زۆر جار بۆ ئەوەی راستی دەستەواژەیەک دەرخەین، ئەوە پێچەوانەی دەستەواژەکە گریمان دەکەین، ئەگەر پێچەوانەی دەستەواژەکە راست دەرچوو، ئەوە دەستەواژە رەسەنەکە هەڵەیە، ئەگەر پێچەوانەی دەستەواژەکە رەسەنەکە هەڵە دەرچوو، ئەوە دەستەواژە رەسەنەکە راستە. نموونە: ئەگەر بمانەوێت بوونی دارەکەی پێش ماڵمان بسەلمێنم، ئەوە دەڵێم ئەو دارە بوونی نییە. بەس دەبینم سێبەری هەیە و لە تیشکی رۆژ دەماپارێزێت، کەواتە ناکرێت بوونی نەبێت، ئەمەش واتە دارەکە بوونی هەیە کە لە سەرەتاوە وتمان ئەو دارە بوونی نییە، کە چی ئێستا دەڵێین سێبەری هەیە، کەواتە گەریمانەکەمان هەڵە بووە، بۆیە دارەکە بوونی هەیە.

لە بیرکاریدا دەستەواژەی نابەجێ (absurd)، بریتییە لە لێکدژی دەستەواژەکە. بۆ ئەم مەبەستەش بۆ سەلماندنی دەستەواژەیەک بەم میتۆدە، هێڵێکی سور هەیە، کە دەبێت پێوەی پابەند بین:

- بـۆ پیشـاندانی ئەوەی کە Q دەبێـت ڕاسـت بێـت، وا دادەنـێن کە Q ڕاست نییە. واتە وادادەنێن پێچەوانەی Q ڕاستە.

- ئەو میتـۆدانەی پێشـتر هەمـانە بەکـاری دێنـین بـۆ دەرخسـتی دەرئەنجـامی ئەو گریمـانە هەڵەیەی کردوومـانە، لەو شـوێنە دەوەسـتین کە لە یەکێـک لە هەنگاوەکـانی سـەلماندنەکە لێکـدژی لەگەڵ گریمـانە دروسـت دەبێت.

- کـاتی دروسـتبوونی لێکـدژەییەک لەگەڵ هەر یەکێـک لە هەنگاوەکـانی سـەلماندنەکە و گریمـانەکە، ئەوە بۆمـان دەردەکەویـت پـێچەوانەی دەستەواژە ڕەسەنەکە ڕاست نییە، کەواتە دەستەواژە ڕەسەنەکە ڕاستە.

نمـونە بـۆ ئەمە: سـەلماندنەکەی ئیقلـد لە هەمـبەر بـوونی ناکۆتـا ژمـارەی خـۆبەش، کە گریمـانی کـرد کە کۆتـادار (Finite) ژمـارەی خـۆبەش هەیە بۆ ئەوەی بیسەلمێنێت ناکۆتا ژمارەی خۆبەش بوونی هەیە.



هەبوونی سەلماندن

Existence proofs

هەبـــوونی ســـەلماندن، پیشـــانی دەدات یـــاخود دەیســـەلمێنێت کە بەڕاســتی شــتێک هەیە لە هەمــبەر شــتێکی تــر یــان نــا. لەبەر ئەوەی چەمــکە بیرکارییەکـــــــــان زۆربەی هەرە زۆری پەتـــــــــین (Abstract)، ئەوە ســـەلماندنەکانی بـــوون و نەبـــوون دەتوەســـتێتن لە بەهەدەردانـــی کـــات و هەوڵەکانــت بــۆ دۆزینــەوەی شــتێک یــان داتاشــینی شــتێک، کە ئەم شــتە لە ڕاستیدا بوونی نییە و ناشیبێت! تەنانەت لە بارە پەتییەکانیش.

دوو جــۆر لە ســەلماندنی هەبــوون-بــوون هەنە، یەکەمیــان: ســەلماندن بەهــۆی بونیاتنــان (proof by constriction): کە تێــدا نمــونەی بەرجەســـتەیی بەرهەم دەهێنـــین لە شـــتەکان یـــان لە تایبەتمەنـــدییەکان. دووەمیــان: هەبــوونی ســەلماندن، کە پێــی دەوتــرێن ســەلماندن بەهــۆی نــا-بونیاتنــانەوە (nonconstractive proof): کە لۆجیکیــانە بە پێــی پێوســت بــۆ بــوونی شــتانێک هەنگــاو دەنێــت، بەبــێ پێدانی ئەتەرەیەک[104] یــان هێمــایەک دەربارەی نمونەیەک.

ســـەلماندنی بونیـــاتنەر زۆر ڕوونە. ئەگەر بێـــت و بپرســـین ژمـــارەی جـــووت هەیە کە دابەشـــی 16 بێـــت؟ وەڵامەکە بەڵـــێ هەیە، کە ســـەلماندنی کــورت و پوخــت بــریتییە لە 16 خــۆی. بە شــێوەی درێــژ بــریتییە لە ئەوەی

[104] ئەتەر: نیشانە و بەڵگە.

کە 16 دابەشـــی خـــۆی و دابەشـــی 2 دەبێـــت، وە 2 ئەو ژمـــارەیە کە 16 بەســـەری دابەش دەبێـــت. بەدڵنیـــاییی چەنـــدین ژمـــارەی تـــر دەکرێـــت لە ســـەلماندنەکە بەکاربهێنـــدرێت، بۆنمـــونە هەمـــوو بەشـــداربووەکانی 16 دەکرێـــت لە ســـەلماندنەکە بەکاربهێنـــدرێت، بەڵام بـــۆ ئەوەی بیســـەلمێنین شـــتێک بـــوونی هەیە، پێوســـتە تەنیـــا یەک نمـــونە دیـــار بخەیـــنە ڕوو لە نـــاو سەلماندنەکە لەکاتێک چەندین نمونەی تر بوونی هەیە.

ســـەلماندنی نـــا-بونیـــاتنەر: دەکرێـــت زۆر ورد بێـــت، بۆنمـــونە: دەکرێـــت توانـــــای ئەوەمـــــان هەبێـــت کە پیشـــــانی بـــدەین ئەو هاوکێشـــــەیە $9x^5 + 28x^3 + 10x + 17 = 0$ شـــیکاری هەیە، بەبـــێ وتنـــی ئەوەی ئایـــا شـــیکارەکە چییە و چـــۆنە! ئەگەر لە هاوکێشـــەکە نرخـــی ســـفر بـــدەین بە x واتە $x = 0$ ئەوە لە لای چەپ 17 دەمێنێـــــــتەوە، بەڵام بـــــــۆ $x = -1$ ئەنجـــامەکە دەکـــاتە 30- . لەم ئەنجامـــانەش دەتـــوانین بیـــردۆزی بەهـــای ناوەنـــدی بەکـــاربهێن بـــۆ ئەوەی پیشـــانی بـــدەین کە بـــۆ هەر نرخێکـــی y لە نێـــوان 30- و17، ئەوە نرخێـــک هەیە بـــۆ x لە نێـــوان 1- و 0 کە 0 بەرهەم دێنێـــت لە هاوکێشـــەکە. لەبەر ئەوەی لای ڕاســـتی هاوکێشـــەکە سـفرە، ئەوە شـیکارێک بـۆ هاوکێشـەکە هەیە بە پێـی ئەو سـنورەی سـەرەوە کە دیاریمـــان کـــردووە، بە کەمێـــک کـــارکردن لەســـە هاوکێشـــەکە پیشـــانی دەدات کە شـــیکارەکە بـــێ هاوتـــایە- تـــاکە شـــیکاری شـــیاو لە بەکارهێنـــانی ژمـارە ڕاسـتییەکانە. بە کـورتی واتە: چـونکە بە پێـدانی دوو نـرخ 1- & 0 دوو ژمارەمـــان بـــۆ دەرچـــوو 17 & 30-، دیاریشـــە ســـفر دەکەوێـــتە ئەو

نێـوانە، بـۆیە بە ئـاوەری[105] دەبێـت نرخێـک هەبێـت کە دەبێـتە ڕەگـی-شـیکاری هاوکێشەکە، چونکە 0 لەو نێوانە بوونی هەیە.

[105]ئاوەر: دلنیایی.

پێچەوانە دژەکان و دژە نمونەکان

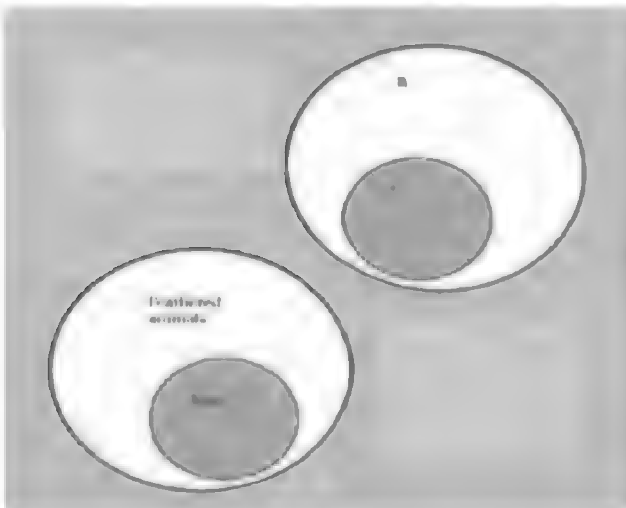
Contrapositives and counterexamples

پـێچەوانەی دەسـتەواژەی p، دەکرێـت پـێ بڵـێن نـاp. پـێچەوانەی ئەو دەسـتەواژەیە راسـتە ئەگەر p هەڵە بێـت، وە هەڵەیە ئەگەر p راسـت بێـت. وەک: هەمـوو مریشـکێک سـپییە، پـێچەوانەکەی دەبێـت: هەمـوو نامریشـکێک نـا سـپییە. لێـرە گـرنگە چـۆنییەتی و راسـتێتی وەک خـۆی بمێنێـتەوە. یەکێـک لە یاسـا زۆر گرنگەکـانی لۆجیـک بـریتییە لەوەی ئەگەر $p \rightarrow q$ راسـت بێـت، ئەوە هاوتـای $\sim q \rightarrow \sim p$ راسـتە ، واتە ئەو دووانە جیاوازییەکیـان نیـیە. هەنـدێ جـار سـەلماندنی دەسـتەواژەیەک بە هـۆی پـێچەوانەکەی ئاسـانترە وەک لە دەسـتەواژە ڕەسـەنەکە، ئەم جـۆرە سـەلماندنەش پێـی دەوترێـت سـەلماندن بەهـۆی پێچەوانە دژەکـان. بەکارهێنـانی ئەم میتـۆدەی سـەلماندنە تەنیـا کاتێـک سـەرکەوتووە ئەگەر بێـت و لێـدوانەکە بسـەلمێندرێت راسـتە، واتە تووشـی دژەیەک نەبـین لێـی. بەڵام لە تـوێژینەوە بیرکارییەکـان، کاتێـک دەسـتەواژەیەکی ڕەسـەن گریمـانەیەکە ، ئەوە هەمیشـە چانسـی ئەوە هەیە کە دەسـتەواژەکە راسـت نەبێـت، وە سـەلماندنیش بـوونی نەبێـت! لەم بـارەش دوو شـت هەیە، ئەوەتە پـێچەوانەی دەسـتەواژەکە بسـەلمێنی لە بـڕی دەسـتەواژە ڕەسـەنەکە، ئەویتـریش ئەوەیە نمـونەیەک بـدۆزیتەوە کە دەسـتەواژەکە بە درۆبخـاتەوە واتە دژی دەسـتەواژەکە بێـت. ئەگەر دەسـتەواژەکەمان Q بڵێـت: هەمـوو ژمـارە جـووتە ئەرێنییەکـان دابەشـی 4 دەبەن، ئەوە دیـارە 6 جـووتە و ئەرێنیـیە، بەڵام 4 دابەش ناکـات، بەو

ژمارە 4 دەوترێن دژە نموونە[106] (counterexample) کە دەستەواژەکەی بەهەڵە خستەوە، واتە disprove.

دەستەواژە: ئەگەر دانەیەک لە کۆمەڵەی A بێت، ئەوە دەبێت لە کۆمەڵەی B یش بێت. پێچەوانە دژەکەی دەبێتە: ئەگەر دانەیەک لە کۆمەڵەی B نەبێت، ئەوە ئەو دانەیە ناکرێت لە A بێت.

دەستەواژە: ئەگەر گیانلەبەرەکە باڵدار بێت، ئەوە دەبێت پەڕەمووچی هەبێت. پێچەوانە دژەکەی دەبێتە: ئەگەر گیانلەبەرەکە پەڕەموچی نەبێت، ئەوە ئەو گیانلەبەرە باڵدار نییە. (ئەو سەلماندنە کافی نییە کە هەموو ئەو گیانلەبەرانەی پەڕەموچیان هەیە، ئەوە باڵدەن).



[106] دۆزینەوەی ئەم نموونەیە لە هەندێ بانگێشەی بیرکارییانە بۆ ڕاستیتی شتێک کارێکی وەها ئاسان نییە.

تێخوێندنی بیرکارییانە

Mathematical induction

یەکێکی تر لە میتۆدەکانی سەلماندن، بریتییە لە سەلماندن بەهۆی تێخوێندنەوە[107]. تێخوێندنەوە (Induction) بریتییە لەو شوێنکەوتنی هەندەکییەکان بۆ بەدەستهێنانی بڕیارێکی هەمەکی (یاسای گشتی). لەم میتۆدە ئەنجامەکان ئەو دەستەواژانە دەگرێتە خۆی کە پشت بە ژمارە سروشتییەکان دەبەستن، بۆیە ئەو دەستەواژەی سەلمێنەی بۆ دەکرێت بۆ شتێکی لەو شێوەیە: بۆ هەر نرخێکی n = 1،2،3،...، n ، p(n) ڕاستە. بۆ سەلماندنی دەستەواژەیەکی لەم شێوە، چوار هەنگاو هەیە دەبێت جێ بەجێبکەین بۆ دەرخستنی ڕاستی و دروستی یاسایەک، ئەوانیش:

1- پیشانی بدە کە ئەوەی هەمانە ڕاستە ئەگەر بێت و $n = 1$، واتە $p(1)$ بسەلمێنە.

2- گریمان بکە کە ئەوەی هەمان ڕاستە ئەگەر بێت و $n = k$ کاتێک $k \geq 1$.

3-پیشان بدە ئەگەر $p(k)$ ڕاست بێت، ئەوە $p(k+1)$ ڕاستە.

---

[107] وەرگێر "مەریوان عبدول" لە پەرتوکی "پوختەی لۆژیک" وشەی "تێخوێندن"ی بەکارهێناوە لە بەرامبەر وشەی " Induction" پەرتوکەکە لە بلاوکراوەکانی ناوەندی "ڕەهەند"ە. سالی 2019 سلێمانی.

4- ئەمەش p(n) ڕاســـت دەردەخـــات بـــۆ هەمـــوو ژمارەیـــەکی n، کاتێک $n = 1,2,3,\ldots$.

هەنگـــاوی چـــوارەم لە ســـێ هەنگـــاوەکەی پـــێش خـــۆی ســـەرچاوە دەگرێـــت یەک بەدوای یەک، واتە هەنگـــاوی یەکەم، هەوێنـــی هەنگـــاوی دووەمە، ئـــی دووەم هەوێنـــی هەنگـــاوی ســـێیەمە، بەو شـــێوە، ئەمـــانەش کە پێـــی دەوترێـــت: Bootstrap argument. کێشـــە فەلســـەفییەکان لەگەڵ چەمەکەکـــانی ناکۆتـــا دەبێـــنە هـــۆی ئەوەی کە زۆر لەگەڵ ئەو میتـــۆدە یەکنەگرنەوە، تانانەت دەگاتە ڕادەی ڕەتکردنەوەشیان هەندێ جار.

INDUCTIVE METHOD TO PROVE

لابردن و هێزلێبڕین

Exhaustion and elimination

سه‌لماندن به‌هۆی هێزلێبڕین، ئه‌و سه‌لماندنه‌یه‌ که‌ کێشه‌که‌ ده‌کاته‌ چه‌ند به‌شێک، که‌ هه‌ر به‌شه‌ و به‌جیا مامه‌ڵه‌ی له‌گه‌ڵ ده‌کات. یه‌کێک له‌ کێشه‌ مێژوویه‌کان که‌ به‌و شێوه‌ سه‌لمێندراوه‌، بیردۆزی چوار ڕه‌نگه‌که‌یه‌ (Four color theorem) ، که‌ ئه‌م بیردۆزه‌ سه‌ره‌تا کرایه‌ چه‌ند به‌شێک که‌ ته‌نیا کۆمپیوته‌ر ده‌یتوانی لێی تێبگات، لێره‌ش پرسیارەک دێته‌ ئاراوه‌: ئاخۆ به‌ڕاستی به‌رنامه‌یه‌کی هێزلێبڕاوی کۆمپیوته‌ر ده‌بێته‌ سه‌رچاوه‌ی له‌ دایکبوونی سه‌لماندنی کێشه‌یه‌ک؟

له‌ یه‌که‌مین سه‌رنج، پرۆسه‌ی لابردنی "شێرۆک هۆڵمس" دێته‌وه‌ یاد، که‌ ده‌شێت وه‌ک پرۆسه‌یه‌کی هێزلێبڕین وابێت. به‌ڵام له‌ ڕاستیدا لابردن، سه‌رنج خستنه‌سه‌ر له‌ گشت ئه‌گه‌ره‌کان دوور ده‌خاته‌وه‌، ئه‌مه‌ش له‌ ڕاستیدا ڕێگای پێچه‌وانه‌ی دژه‌ (contrapositive). به‌کارهێنانی شیکردنه‌وه‌ی هێزلێبڕین له‌ گومانه‌کانی تر، له‌ کێشه‌یه‌کی تاوانکاری، ده‌سه‌لمێنین کۆمه‌ڵێک که‌س هه‌موویان بێ تاوانن ، بۆیه‌ ده‌توانین بڵێین: ئه‌گه‌ر پیاو کوژه‌که‌ به‌ڕێز (ڕاوسبۆتن) نییه‌، ئه‌وه‌ هیچ یه‌ک له‌ گومان لێکراوه‌کان پیاوکوژنین‌ه‌. پێچه‌وانه‌ دژه‌که‌ی بریتییه‌ له‌: ئه‌گه‌ر یه‌کێک له‌ گومان لێکراوه‌کان تاوانباره‌که‌ بێت، ئه‌وه‌ پیاو کوژه‌که‌ به‌ڕێز (ڕاوسبۆتنه‌). وادانانه‌ سه‌ره‌تاییه‌که‌، ئه‌وه‌یه‌ که‌ له‌گه‌ڵ ئه‌وه‌ی ئێمه‌ خشته‌ی ته‌واوی گومان لێکراوه‌کانمان هه‌یه‌، زۆر جار په‌راوێز ده‌خرێن.



بەشی سێزدەهەم

تیۆری ژمارەکان

Number theory

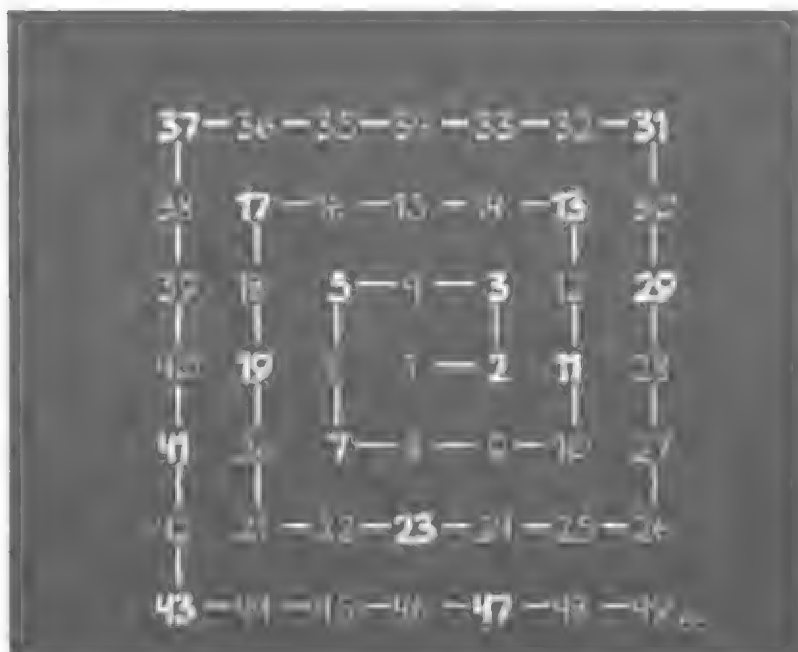


تیۆری ژمارەکان

Number theory

تیـۆری ژمارەکـان، یەکێکـی تـرە لە لقەکـانی بیرکـاری، دەتـوانین بڵـێین کـۆنترین لقـی بیرکـارییە لە دوای ئەنـدازە، کە جـومگەیەکی گـرنکە لە زانسـتی ژمـارە. پێشـکەوتن و دۆزیـنەوە لەم لـقەی بیرکـاری وەهـا ئاسـانییە و زۆر کەس بە لقێکـی وشـک و جاڕسـی دەبیـنن، کە لەو 20 سـاڵەی ڕابـردوو، پێشـکەوتنێکی وەهـا لەم لـقە ڕوویـنەداوە. تیـۆری ژمارەکـان بـریتییە لەو تیـۆرییەی کە لێکـۆڵینەوە لە هەمـبەر ژمارەکـان و تایبەتمنـدییەکانی دەرەوە و نـاوەوەی ژمارەکـان دەکـات، وە تەفسـیرییان دەکـات. تیـۆری ژمارەکـان لێکـۆلینەوە لە مەڕ گشـت جۆرەکـانی ژمـارە دەکـات، بەڵام لەگەڵ ئەمەش، کـۆمەڵەی ژمـارە خۆبەشـەکان سـەرەکیترین کـۆمەڵەن لە تیـۆری ژمارەکـان و بەشـێکی سـەرەکییە لە بیرکردنەوەمـان لەو جیهـانە. ئەگەر چـی کـارکردن لە گەڵ ژمارەکـان ڕەنـگە وشـک و بێـزارکەر بێـت، سـەرەڕای ئەوەش، هەرگیـز نابێـت ژمارەکـان و تیـۆری ژمارەکـان بەکەم بـزانین، چـونکە هەر لەسـۆنگەی ژمارەکـانەوە، ڕووبەڕووی کۆمەڵێـک پرسـیار زۆر قـوڵ و جـدی دەبیـنەوە و کێشـەکان چارەسـەر دەکەیـن. لەبەر ئەوەی ژمـارە خۆبەشـەکان بنـاغەی دروسـتبوونی ژمـارە سروشـتییەکانن، بـۆیە زۆرێـک لە کێشـەکان لە تیـۆری ژمارەکـان پەیوەنـدی بە ژمـارە خۆبەشـەکانەوە هەیە. لەگەڵ ئەمەش، ژمـارە خۆبەشـەکان، چەقـی تیـۆری ژمارەکـانە لە گرنگـی و بەکارهێنانیـان، کە لە کریپتـۆگرافی (cryptography) و ئاسایشـی و پاراسـتی ئیمێلەکـان،

یان گواستنەوە بانکییەکان، ئەمانە گشتیان بونیاتێکی ژمارەییان هەیە، کە لە نووسینی ژمارە دابەشەکان (ژمارەی دابەش) بەهۆی لێکدانی خۆبەشەکان. دروستکردنی و کۆد لە ژمارە خۆبەشەکان ڕەنگە ئاسان بێت، بەڵام شکاندنیان، ئێجگار قورس و گرانە. ئەم لقە، پەتی ترین لقی بیرکارییە.



سەلماندنەکەی ئیقلید لە مەڕ ناکۆتایی ژمارە خۆبەشەکان

Euclid's proof of the infinite primes

ئیقلیـد 3000 سـاڵ بەر لە ئێسـتا، لە پەرتـوکەکەی بە نـاوی دانەکـان (elements)، دەیسـەلمێنێت کە ناکۆتـا لە ژمـارەی خۆبەشـمان هەیە، واتـا کـۆمەڵەی ژمـارە خۆبەشـەکان کـۆمەڵەیەکی ناکۆتـایە (Infinite). ئیقلیـد بـۆ سـەلماندنی ئەم ڕاسـتییە، میتـۆدی دژەیەک بەکاردێنێـت بـۆ ئەوەی ئەمە بسـەلمێنێت، واتـا پـێچەوانەکەی گریمـانە دەکـات، وا دادەنێـت کە کۆتـادار (Finite) لە ژمـارەی خۆبەشـمان هەیە. بەم شـێوەیە، گریمـان دەکـات: **کۆمەڵەی ژمارە خۆبەشەکان کۆمەڵەیەکی کۆتادارە.**

سـەلماندن: وا دادەنێـین کە N ژمـارەی خۆبەشـمان هەیە. لەبەر ئەوەی N کـۆمەڵەیەکی کۆتـادارە لە ژمـارەی خـۆبەش، ئەوە دەتـوانین ژمارەکـانی نـاو N بەو شـێوە ڕیـز بکەیـن: $P_1, \dots, P_N$. ئێسـتا لەو چەنـد ژمارە خۆبەشـەی هەمـانە، ژمارەیەکی تر دروستدەکەین، نـاوی دەنـێین x ، کە x لە هـیچ یەک لە دانەکـانی نـاو N ناچێـت، واتە لە تەواوی ژمارەکـانی ناو N جیاوازە. دروستکردنی x بەم شێوەیە:

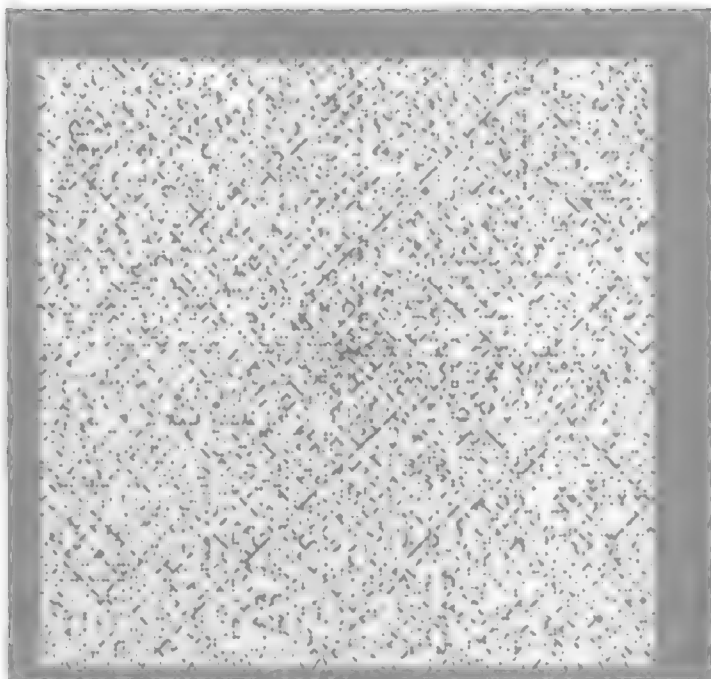
$$x = (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_N) + 1$$

واتە هەمـوو خۆبەشـەکان لێکـدەدەین و دواتـر کـۆی 1 دەکەیـن. ئێسـتا دوو ئەگەر هەیە، ئەویش: x خۆبەشە یان خۆبەش نییە؟

1) ئەگەر x خۆبەش بێت، ئەوە دەگەینە دژەیەک، چونکە ئێمە گریمانمان کردووە N کۆمەڵەیەکی کۆتادارە و هەموو ژمارە خۆبەشەکانی تێدایە، کەچی ئێستا x یێکمان دۆزییەوە، کە خۆبەشە و لەو ناو N دا نییە، کە واتە N کۆتادار نییە، ئەمەش واتا N ناکۆتایە، واتا، ناکۆتا ژمارەی خۆبەشمان هەیە.

٢) ئەگەر x خۆبەش نەبێت، واتە x ژمارەیەکی دابەشە، لەبەر ئەوەی هەموو ژمارەیەکی دابەش بە هۆی لێکدانی چەند ژمارەیەکی خۆبەش دەنووسرێت، ئەوە x لە ئەنجامی لێکدانی چەند خۆبەشێک دەنووسرێت. ئەگەر ئێستا x دابەشی هەر یەک لە خۆبەشەکانی ناو N بکەین ئەوە ماوەیەک دەمێنێتەوە، کە ئەویش بریتییە لە 1، ئەمە واتە x دابەشی هیچ یەک لە خۆبەشەکانی ناو N نابێت، وە لەبەر ئەوەی x لە خۆبەشەکانی ناو N دروستکرابوو، کەواتە x تەنیا دابەشی خۆی و 1 دەبێت، ئەمەش واتە x ژمارەیەکی خۆبەشە. دەرکەوت x خۆبەشە ، بە پێی خاڵی یەکەم، کەواتە بۆمان دەردەکەوێت x خۆبەشێکە و لە ناو N نییە، کەواتە ئەو گریمانەی وتمان: کۆتادار ژمارە خۆبەشمان هەیە، هەڵە دەرچوو. کەواتە پێچەوانەکەی راستە، کە ناکۆتا ژمارەی خۆبەشمان هەیە

■



ئەم وێـــنەی ســـەرەوە، 400,000 ژمـــارە دەنوێنێـــت، کە خـــاڵە ڕەشەکان، ئاماژەن **بۆ ژمارە** خۆبەشەکان.

خۆبەشە دووانەکان

Twin primes

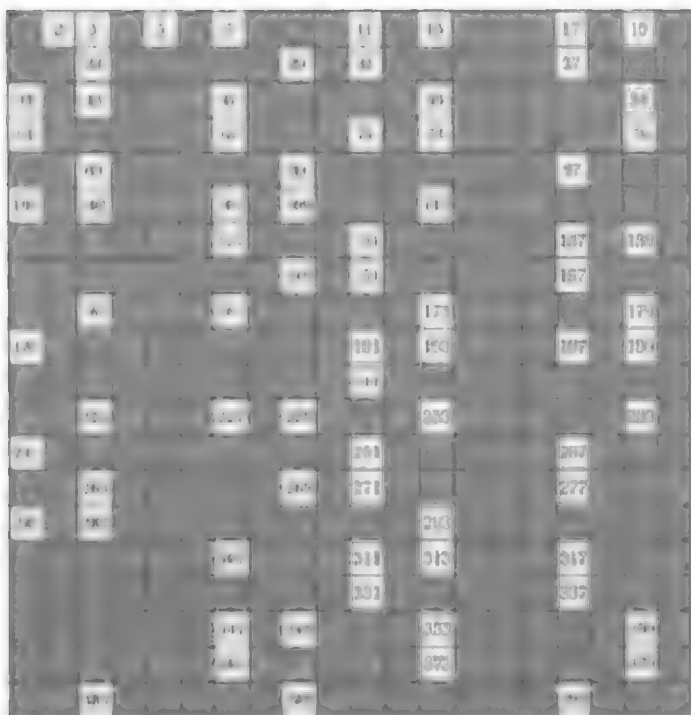
خۆبەشـــە دووانەکـــان، ئەو ژمـــارە خۆبەشـــانەن کە مەودای نێوانیـــان یەکســـــانە. ئەگەر ســـــەرنجی ژمـــــارە خۆبەشـــــەکانی بـــــدەین لە نـــــاو کـــــۆمەڵەی 2،3،5،7،11،13،17،19،23،29،31،37،43،47،53،... ژمـــارە خۆبەشـــەکان 41&43 ،29&31 ، 17&19 ، 11&13 ئەمـــانە خۆبەشـــی دووانەن، چـــونکە جیـــاوازی نێوانیـــان بـــریتییە لە 2 یەکە. هەروەهـــا 3،5، &7 ئەمـــانە خۆبەشـــی ســـیانەن. بە شـــێوەیەکی نزیکەیـــی 808،888،577،436 خۆبەشـــــی دووانە هەیە؛ ئەوەی کە تـــــا ئێســـــتا زانراوە، کە ئەم خۆبەشە دوانانەش گشتیان لەخوار نرخی 10^{18} دان.

زۆرێـــک لە بیرکاریزانەکـــان باوەڕیـــان وایە ناکۆتـــا خۆبەشـــی دووانەمـــان هەیە، لەکاتێـــک ئەمە پرســـیارێکە (conjector) شـــیکار نەکـــراوە هەتـــا ئێســـتا. شـــێوەی تـــری دووانەی خـــۆبەش دەکرێـــت دروســـتبکرێت، وەک هەمـانە جـووتە خۆبەشـە ئامۆزاکـان (cousin primes) کە جیـاوازی نێـوان ئەو خۆبەشـانە بـریتییە لە 4. یـان جـووتە خۆبەشـە شەشـییەکان، واتە ئەو خۆبەشانەی جیاوازی نێوانیان بریتییە لە 6 .

لە هەمـــبەر ئەو بیـــرۆکەیە، پرســـیارێک دروســـت دەبێـــت، کە ئەو پرســـیارە تـــا هەنـــووکە بە یەکلانەکـــراوی مـــاوەتەوە، کە پێـــی دەڵـــێن: Polignac's conjecture proposes، ئەم پرســـە دەڵێـــت: بـــۆ هەر

ژمـــارەیەکی جـــووتی (even) سروشـــتی k ، ئەوە ناکۆتـــا جـــووتە (Piar) ژمارە خۆبەش هەیە کە جیاوازی نێوان ئەو خۆبەشانە بریتییە لە k.

واتە، ئەگەر k=10، ئەوە ناکۆتـــا جـــووتە خـــۆبەش هەن کە جیـــاوازی نێوانیان بریتییە لە 10.



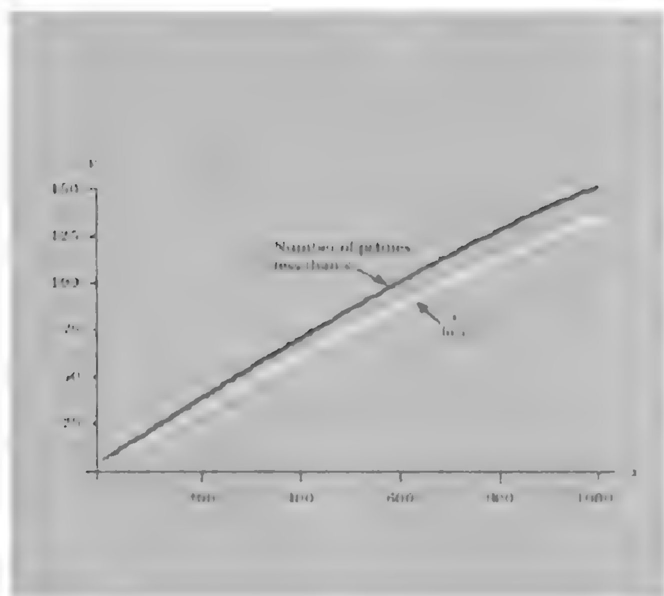
بیردۆزی ژمارە خۆبەشەکان

Prime number theorem

بیـردۆزی ژمـارە خۆبەشـەکان دەکرێـت بیردۆزێکـی هیـوا بەخـش بێـت، لەهەمـان کـات بیردۆزێکـی سـەرنج ڕاکێشیشـە. لە ڕێـگەی ئەم بیـردۆزەوە دەزانـین کە لە خـوار ژمـارەی x چەنـد ژمـارە خـۆبەش هەیە. ئەویـش بەهـۆی ئەم یاسـایەوە $\frac{x}{ln(x)}$ ، واتە ئەگەر بمـانەوێ بـزانین لە خـوار 100 چەنـد ژمارەی خۆبەش هەیە، ئەوە ئەمە شیکار دەکەین: $\frac{100}{ln(100)}$.

به هـۆی خشـتەی ژمـارە خۆبەشـە زانراوەکـان، 'کـارل گـاوس' تـوانی تەفسـیری ئەوە بکـات کە چـڕی ژمـارە خۆبەشـەکان بە نزیکەیـی دەکـاتە $\frac{1}{ln(x)}$. ئەمەش واتـای ئەوەیە ئەگەری دۆزینـەوەی خۆبەشـێک، لە مەودایەکـی بچـوک بە پـانی d و لە دەوروبەری x ، بە نزیکەیـی دەکـاتە: $\frac{d}{ln(x)}$. ئەگەر ئەمە ڕاسـت بێـت، ئەوە کـۆی (total) ژمـارە خۆبەشـەکانی بچـوکتر لە x بە نزیکەیـی دەکـاتە تەواوکـاری چـڕییەکەی $\int_2^x \frac{dt}{ln(t)}$، ئەمەش هەر بە نزیکەیی دەکاتەوە: $\frac{x}{ln(x)}$.

ئەم وێـنەی خـوارەوە ئەوە پیشـان دەدات کە هێڵـی ژێـر $\frac{x}{ln(x)}$ بـریتییە لە هۆکاربەنـــدی نزیکەیـــی هـــێڵەکەی ســـەرەوە کە بـــریتییە لە ژمـــارەی خۆبەشـــەکانی خـــوار x . بەڵام ئەمە ئەوە ئاشـــکرا دەکـــات کە ئەنجـــامی راســـتەقینە مـــومکینە بە بەکارهێنـــانی دەربڕینێـــک لە بیرکاریـــدا بزانـــدرێت، کە پێی دەوترێت نەخشەی زیتا ڕیمان (Riemann zeta fuction)



نەخشەی زێتا ڕیمان

Riemann zeta function

نەخشـــەی زێتـــا ڕیمـــان ، بـــریتییە لەو نەخشـــەیەی کە زۆر بە تونـــدی پەیوەســـتە بە چـــۆنییەتی دابەشـــبوون و بڵاوبـــوونەوەی ژمـــارە خۆبەشـــەکان. ئەم نەخشـــەیە بـــریتییە لە زنجیرەیەکـــی ناکۆتـــا. وەک لەم شـــێوەی خـــوارەوە خراوەتە ڕوو:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \prod_{p\ prime} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) - 1$$

کاتێک $\prod$ بـــــــریتییە لە لێکـــــــدانی ڕادە جیاوازەکـــــــان. بەهـــــــۆی بەکارهێنـــانی تەکنیکـــی بەردەوامـــی شـــیکاریی (analytic)، ئەوە نەخشـــەی ζ دەتوانـــدرێت فراوانتربکرێـــت بـــۆ نەخشـــەی شـــیکارەیی لە ژمـــارە ئاوێتەکـــان، $s \neq 1$ لەگەڵ کـــارکردن و وردبـــوونەوەی زیـــاتر، ئەم هاوکێشـــەی کە لە وێـــــنەکە دراوە بەرهەم دێـــــت. کە ئەمەش پەیوەنـــــدییەکەی زۆر تەواوە لە نێـــوان کـــۆی لۆگـــاریتمی سروشـــتی لە ژمـــارە خۆبەشـــەکانی بچـــوکتر لە x، x خۆشـــی و x^z کە لەو شـــوێنەی کە نەخشـــەی زێتـــا لە بەهـــای z دەکـــاتە سـفر. بـۆیە ئەگەر زانیمـان نەخشـەی زێتـا لە کـوێ ئەنجـامەکەی دەبێـت سـفر ، ئەوە تەواوی ئەوەی دەمـــــانەوێ بەدەســـــتمان دەکەوێـــــت لە مەڕ ژمـــــارە خۆبەشـــــەکانی بچـــــوکتر لە x. لەمەوەش کێشـــــەیەک ســـــەریهەڵدا و تـــــا

هەنـووکەش یەکلانەبـۆتەوە، ئەویـش گریمـانەی ڕیمـانە (Riemann haypothis).



گریمانەی ریمان

Riemann hypothesis

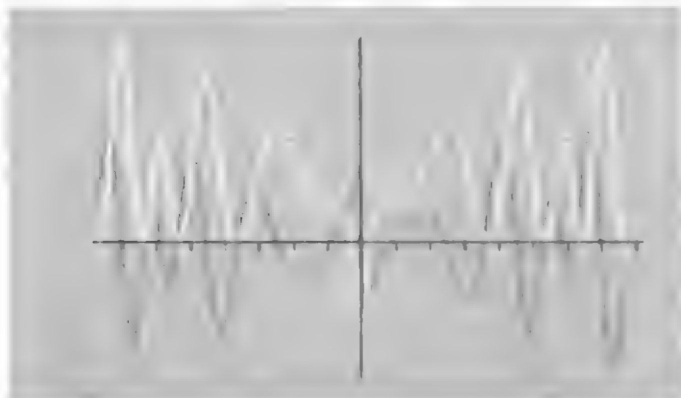
گریمـــانەی ریمـــان، بـــریتییە لە یەکێـــک لە کێشـــە کـــۆنە چارەســـەر نەکراوەکـــانی بیرکـــاری. گریمـــانەکە لە لایەن بیرکـــاریزانی ئەلمـــانی "ریمـــان" خـــۆیەوە ئاراســـتەکراوە کە هەر لەســـەر نەخشـــەی زیتـــا ریمـــانە، کە ئایـــا ئەم نەخشـــەیە لە چ نرخێـک دەکـاتە سـفر؟ لەکاتێـک لە نەخشـەکە چەنـدین خـاڵ-نـرخ هەن کە تێـدا دەکـــاتە ســـفر، کە ریمـــان خـــۆی باســـی ئەو خـــاڵانەی کـردووە، ئەو سـفرەی لەو خـاڵانەوە بەدەسـت دێـت، پێـان دەوترێـت سـفری بێـــبەر (trivial zeros)، ئەو خـــاڵانەش بـــریتیین لە ژمـــارە جـــووتە نەرێنییەکـــان: $-2, -4, -6$ .... تـا بەم شـێوە. وە بە هەمـــان شـــێوە چەنـــد خـالێکی تـر هەن کە تێدا نەخشـەکە دیسـانەوە تێدا دەکـاتە سـفر، ئەو خـاڵەش ئەو شـــێوەی هەیە: $\frac{1}{2}+ix$ کاتێـــک x ژمـــارەیەکی راســـتییە و i بـــریتییە لە ژمـــارەی ئـــاوێتە-خەیـــالی $\sqrt{-1}$، واتە راســـتەهێڵێکی ســـتونیمان هەیە کە بەشـــە راســـتییەکەی دەکـــاتە $\frac{1}{2}$ ، کە نەخشـــەکە لە هەر خـــالێکی ســـەر ئەو راســـتە هـــێڵە دەکـــاتە ســـفر، پرســـیارەکە ئەوەیە: **ئەگەر نەخشـــەکە تەنیـــا لە خاڵەکـانی سـەر ئەو راسـتەهێڵە دەکـاتە سـفر ئەوە بیسـەلمێنە، یـان هـیچ خاڵێکی تر هەیە لە دەرەوەی ئەو راستەهێڵە نەخشەکە تێدا بکاتە سفر؟**

ئەم گریمـــانەیەی ریمـــان یەکـێکە لەو چەنـــد پرســـیارە شـــیکارنەکراوانەی کە لە لایەن پەیمانگای کلای بیرکاری، خەڵاتی بۆ تەرخانکراوە.

Clay Mathematics Institute Millennium Problems

واته ئه‌گه‌ر بتوانی هه‌ر کام له‌و پرسانه یه‌کلابکه‌یته‌وه، ئه‌وه ده‌بیته خاوه‌نی یه‌ک ملیۆن دۆلاری و چه‌ندین خه‌لاتی تری جیهانی. به‌هه‌مان شێوه، بیرکاریزان 'دەیڤید هیلبێرت' چه‌ندین پرسیاری هه‌یه که تا ئێستا شیکاریان بۆ نه‌دۆزراوه‌ته‌وه.

سه‌باره‌ت به سفره‌کانی نه‌خشه‌ی زیتا ریمان ، تا ئێستا 10 ترلیۆن سفر دۆزراوه‌ته‌وه له‌سه‌ر ئه‌و راسته‌هێڵه‌ی له‌سه‌ره‌وه باسمان کرد، به‌لام له‌گه‌ڵ ئه‌وه‌ش ئه‌م پرسه هه‌ر به یه‌کلانه‌کراوه‌یی ماوه‌ته‌وه، چونکه وتمان بیرکاری له گشتییه‌وه بۆ به‌ش داده‌کشێت.



چه‌ماوه سپییه‌که به‌شی راستی و هێڵه بۆره‌که‌ش به‌شی خه‌یالی ده‌نوێنن له نه‌خشه‌ی ریمان زیتا بۆ $\frac{1}{2}+ix$. نه‌خشه‌که ده‌بێت به سفر، کاتێک هه‌ردوو چه‌ماوه‌که هاوکات به‌یه‌که‌وه سفر بن-ته‌وه‌ره‌ی X ببڕن.

سییانەی فیساگۆرسی

Pythagorean triple

سێ ژمارەی تەواوی سروشتی a،b، &c پێیان دەوترێت "سییانەی فیساگۆرسی" ئەگەر بێت و ئەو سێ ژمارەیە پاسەدانی هاوکێشەی فیساگورس بکەن: $a^2 + b^2 = c^2$. بۆ نموونە (3،4،5) سێ ژمارەی فیساگۆرسین - سیانەی فیساگۆرسین، چونکە: $3^2 + 4^2 = 5^2$ کە دەکاتە: $9 + 16 = 25$. ئەمە روونە کە ناکۆتا سیانەی فیساگۆرسمان هەیە، چونکە بە جارانکردنی هەر پێکهاتەیەکی سییانەیەکی فیساگۆرسی بە ژمارەیەک، ئەوە دیسانەوە سیانەی فیساگۆرسی بەرهەمدێت، واتە ئەگەر (3،4،5) هەر یەک لەم ژمارانە جارانی 2 بکەین (6،8،10) ئەوە ئەمانەش دەبنە سیانەی فیساگۆرسی، چونکە $6^2 + 8^2 = 10^2$. سیانەی فیساگۆرسی بەهۆی ڕێسایەکەوە دەتواندرێت بدۆزرێتەوە، ئەویش بەم شێوەیە: دوو ژمارەی سروشتی x و y دەست نیشان دەیکەن بەو مەرجەی $x > y$ دواتر پێکەوەبەستانی ئەو دوو ژمارەیە بەو شێوەی خوارەوە:

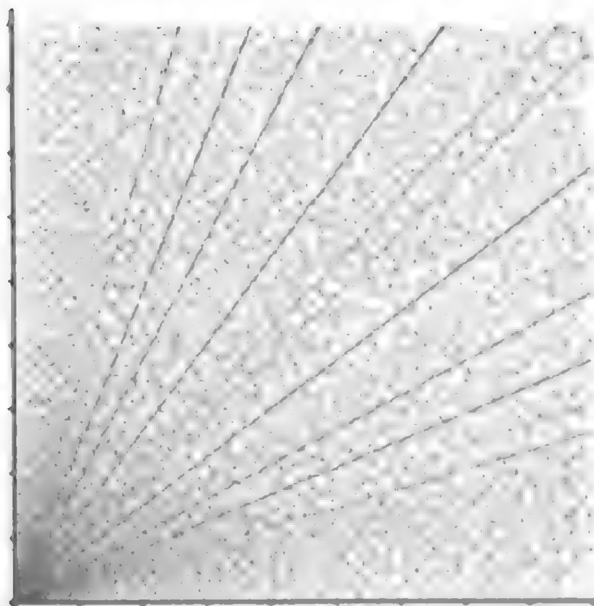
$$a = x^2 - y^2$$

$$b = 2xy$$

پاشان:

$$a^2 + b^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + 4x^2y^2$$
$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$$

بـــۆیە، ئەو ســـــیيانە بـــــریتییە لە ($x^2 - y^2$، $2xy$، $x^2 + y^2$). دەبێـــت هەمـــــوو ســــــییانە فیساگۆرســـــییەکان بتوانـــــدرێت لەســــەر ئەم شـــــێوەیە بنووسرێت.



نواندنی سییانەی فیساگۆرسی بە هێلکاری.

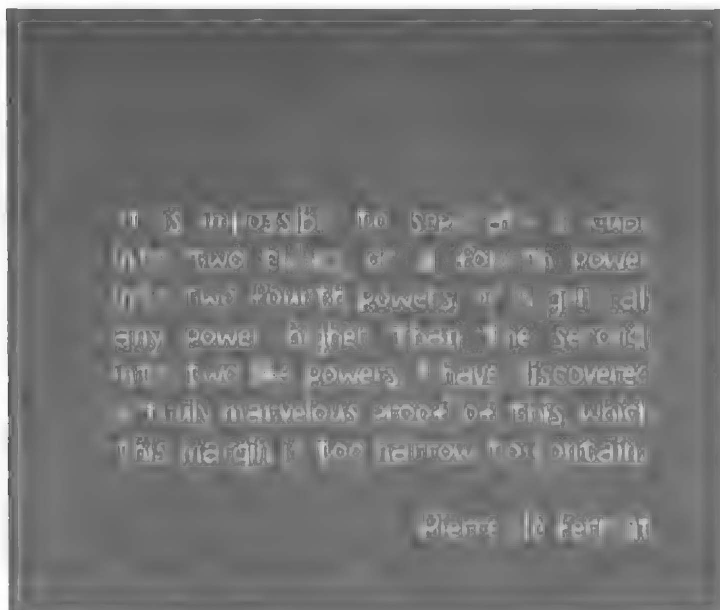
داوین بیردۆزی فیرمات

Fermat's last theorem

دوایــــن بیــــردۆزی فیرمـــــات، یەکێـــک بـــوو لە کێشــــە کـــۆنە چارەســـەرنەکراوەکانی تیـــۆری ژمارەکـــان، بەجۆرێـــک ئەم کێشـــەیە نـــزیکەی 350 ســـالی خایانـــد تـــا توانـــدرا یەکلابکـــرێتەو! کێشـــەکەش لە لایەن ئەنـــدریو وایەڵـــس (Andrew wiles) لە پەیمانگـــای نیـــوتن لە کـــامبریج لە ســـالی 1995 یەکلاکرایەوە، واتە سەلمێندرا.

دەقـــی کێشـــەکەش ئەوەبـــوو: ئەم هاوکێشـــەیە: $x^n + y^n = z^n$ کاتێـــک $n \geq 3$ شـــیکاری هەیە کاتێـــک $x,y \,\&\, z$ ســـێ ژمـــارەی سروشـــتین؟ "ئەنـــدریو وایەڵـــس" ســـەلماندی کە شـــیکاری نیـــیە! بـــۆ نمـــونە ئەگەر ســـەیر بکەیـــن کاتێـــک $n = 2$ ، ئەوە دەبێـــتە یاســـای فیســـگۆرس، کە لە بـــابەتی پێشـــوو بینیمـــان ناکۆتـــا ســـیانەی فیساگۆرســـی هەن کە پاســـەدانی هاوکێشـــەکە دەکەن. بەلام بـــۆ $n = 3$ ، هـــیچ ســـێ ژمـــارەی سروشـــتی نـــادۆزیتەوە کە پاســـەدانی ئەم هاوکێشـــەیە: $x^3 + y^3 = z^3$ بکـــات! ئەنـــدریو ســـەلماندنەکەی لەســـەر تیـــۆری بـــڕگە هێلکەییەکـــان (Elliptic curves) دارشت.

فیرمـــات ئەم کێشـــەی لە پەرتوکەکەیـــدا ئامـــاژە پێـــدا لە ســـالی 1637، کە دەڵێت: میتۆدێکم دۆزیوەتەوە بۆ سەلماندنی ئەم شتە.

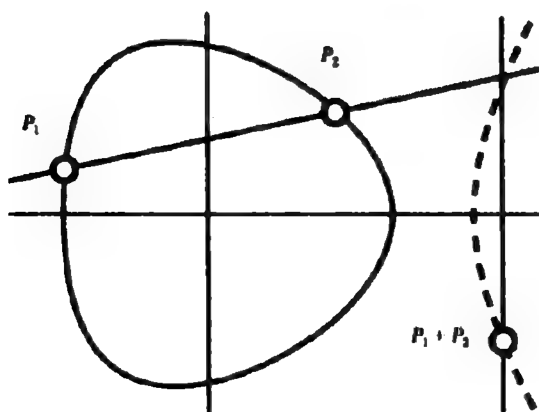


مەحاڵە شەش پاڵوەک جیابکەینەوە بۆ دوو شەش پاڵوی تر، یان بنچینە و هێزکی چواری بۆ دوو 'بنچینە و هێزی چواری'، یان بە شێوەیەکی گشتی، هەر هێزێک گەورەتر لە دوو، جیابکرێتەوە بۆ هێزی هەمان شێوە، بۆیەش سەلماندنێکی ناوازەم لە هەمبەر ئەوە دۆزیوەتەوە، بەلام ئەم لێوارە (پەراوێزە) تا بڵێی بچوکە-تەسکە بۆ لەخۆگرتنی هەموو ئەمانە. (فیرمات)

خاڵە ڕێژەییەکانی سەر چەماوەیەک

Rational points on a curve

خاڵە ڕێژەییەکان، ژمارەن یان بەهای نەخشەیەکە کە دەتواندرێت بەهۆی ڕێژەی نێوان دوو ژمارەی سروشتی تەفسیر بکرێت و بنووسرێت. ناسینەوەی خاڵە ڕێژەییەکانی سەر چەماوەیەکی ناتەواو (هێلکەیی) یارمەتیدەر بوو بۆ سەلماندنی 'دوایین بیردۆزی فیرمات'. ئەگەر بێت و هاوکێشەکەی بیردۆزی فیرمات: $a^n + b^n = c^n$ دابەشی c^n بکەین دەگەین: $\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n = 1$. ئەگەر شیکارگەلێک بۆ ئەو هاوکێشەیە هەبێت، ئەوە دەبێت ئەو شیکارانە یەکبگرێتەوە-بگونجێت لەگەڵ خاڵەکانی سەر چەماوەکە: $x^n + y^n = 1$ کاتێک x و y ژمارەی ڕێژەین. بۆ چەماوەی: $x^2 + y^2 = 1$ ناکۆتا ژمارە ڕێژەیی بوونی هەیە، بۆیە ئەو هاوکێشەیە: $a^2 + b^2 = c^2$ ناکۆتا شیکاری هەیە، واتە ناکۆتا 'سیانەی فیساگۆرسی' بوونی هەیە. بۆیە ئەگەر n گەورەتر بێت لە 2 یان زیاتر، ئەوە شتەکان ئاڵۆزدەبن. ئەو پەیوەندییەش لە نێوان خاڵە ڕێژەییەکانی سەر چەماوەکان و شیکارە تەواوەکان بۆ هاوکێشەکان، بۆتە هەوڵێکی نزیکتر بۆ لێکۆڵینەوە لە ڕێگەی یەکتربرینی نێوان چەماوە بەردەوامەکان و خاڵە ڕێژەییەکان. بۆ چاماوەیەکی سادە و ساکار، ناکۆتا خاڵی ڕێژەیی هەیە، یان هیچ خاڵی ڕێژەیی بوونی نییە. چەماوە زۆر ئاڵۆزەکان چەند خاڵێکی ڕێژەییان هەیە.



گرووپێـک، کە هەڵگـری سـیفەتی ئـاڵوگۆڕییە دەکرێـت پەیوەنـدی هەبێـت بە بڕگەیەکـی هێلکەیـی (Elliptc curve). ڕاسـتەهێڵەکەی سـەرەوە دوو خـاڵی دیـار-ئاشـکرای لەخۆگرتـووە (P_2وP_1) کە چەمـاوەیەکی بڕیـوە لە خاڵێـک (خـاڵی سـێیەم)، وە وێـنەدانەوەی ئەو خـاڵە بە گـوێرەی تەوەرەی x، ئەوە گرووپێکی ئاوێتەی دوو خاڵیمان پێ دەدات، ئەویش: ($P_2 + P_1$).

گریمانەی بریتش-دایر

The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture

گریمانەی بریتیش- دایر، یەکێکە لە کێشە چارەسەرنەکراوەکانی بیرکاری، کە یەکێکە لەو کێشانەی کە خەلاتێکی یەک ملیۆن دیناری بۆ تەرخان کراوە لە لایەن پەیمانگای کلای بیرکاری. ئەم کێشەیە بە هەمان شێوەی "نەخشەی زیتا ریمان "یە کە لە ژماردنی ژمارە خۆبەشەکانەوە سەرئاوکەوت. ئەم گریمانەیە دەڵێت: دەبێت هەمان زنجیرە توانی هەبێت بۆ ژماردنی خاڵە ڕێژەییەکانی سەر چەماوەیەکی هێلکەیی (rational points of an elliptic curve). چەماوەی هێلکەیش ئەو چەماوەیە کە ئەو شێوەی هەیە:

$$y^2 = x^3 Ax + B$$

کاتێک $A\&B$ دوو ژمارەی تەواون، کە ئەم هاوکێشەیە چەماوەکەی دوو بەشە یان یەک بەشە. بە شێوەیەکی ورد، بەهۆی چەماوەیەکی هێلکەیی، "برتیش و دایر" چۆنییەتی دروستکردنی زنجیرەکی توانی لەگەڵ کۆلکەکانی $\frac{a_n}{n^s}$ پیشاندا، وە کاتێک s=1 ، گریمانەکەی ئەوەیە: دەریبخەکەی ناکۆتا (Infinite) خاڵی ڕێژەیی بوونی هەیە، وە یان کەی کۆتادار (Finite) خاڵی ڕێژەیی لەسەر چەماوەی لەم شێوەیە هەیە؟

ئەم کێشەیە بە شێوە گشتییەکی تا ئێستا یەکلانەبۆتەوە، بەڵام گریمانەکە بۆنی ئەوەی لێ دێت کە ڕاست بێت بۆ هەندێ باری شاز.

ئەمەش چەقـــی تێگەیشـــتنە لە نەخشـــەی لەو شـــێوە، کە تـــا چ رادەیەک دەکرێـــت بەکاربهێنـــدرێت بـــۆ دیـــاریکردنی ژمـــارەی تایبەتمەنـــدییەکانی تیۆرییەک.



ئەو چەنـــد پرســـیارەی کە خەڵاتـــی "یەک ملیـــۆن دۆلاری" بـــۆ تەرخـــان کراوە بۆ ئەو کەسەی بتوانێت یەکێک لە مانە یەکلابکاتەوە-شیکاربکات.

گریمانەی گۆڵدباخ[108]

Goldbach Conjecture

گۆڵدباخ ماتماتکزانێکی ئەڵمانییە کە لە ساڵی 1690 لە دایک بووە و ساڵی 1764 گیانی سپاردووە. گۆڵدباخ لەهەمان کاتدا یاساشی خوێندووە. دوای تەواوکردنی خوێندنی لە زانکۆی رۆیال، بۆ چەندێش شوێنی تر گەڕاوە، وەک: ئیتالیا، هۆڵەندا و فرنسا، لەم گەڕانەش چاوی بەچەندین ماتماتیکزانی دیار و بەرزی کەوتووە، وەک: (لیبینز-ئۆیلەر-برنۆلی) کە تاوتوێی کارەکانی خۆی لەگەڵ ئەماندا کردووە، بۆیە لەگەڵ ئۆیلەر بیردۆزێکیان هەیە پێی دەڵێن: Goldbach–Euler theorem. گۆڵدباخ لە ساڵی1742 کاغەزێک بۆ "ئۆیلەر" دەنێرێت و تێدا باسی مەسەلەیەک-گریمانە دەکات کە لە خوارەوە وێنەکەی دانراوە.

گریمانەکە: هەر ژمارەیەکی جووتی لە 2 گەورەتر، دەتواندرێت لە ئەنجامی کۆکردنەوەی 2 ژمارەی سەرەتایی (خۆبەش) بنووسرێت.

نمونە: ... $3+3=6$ ، $3+5=8$ ، $7+3=10$ ، $7+5=12$

زۆرێک لە ماتماتیکزانان پێیان وایە ناتوندرێت ئەمە بسەلمێندرێت، واتە سەلماندنی شتێکی قورسە کە ئەمە بۆ هەموو ژمارەیەکی جووتی ئەرینی راستە، بۆیە لە نێوان ساڵەکانی2002 بۆ 2000 یەک میلۆن

[108] ئەم بابەتە لە پەرتوکەکە باس نەکراوە، بەلام بە پێوستم زانی کە لێرە دایبنێم.

دۆلار وەک خەڵات تەرخانکرا بۆ ئەو کەسەی کە بتوانێت ئەم گریمانەیە یەکلابکاتەوە، بەڵام کەس نەبوو، هەتا هەنووکەش کەس نییە!

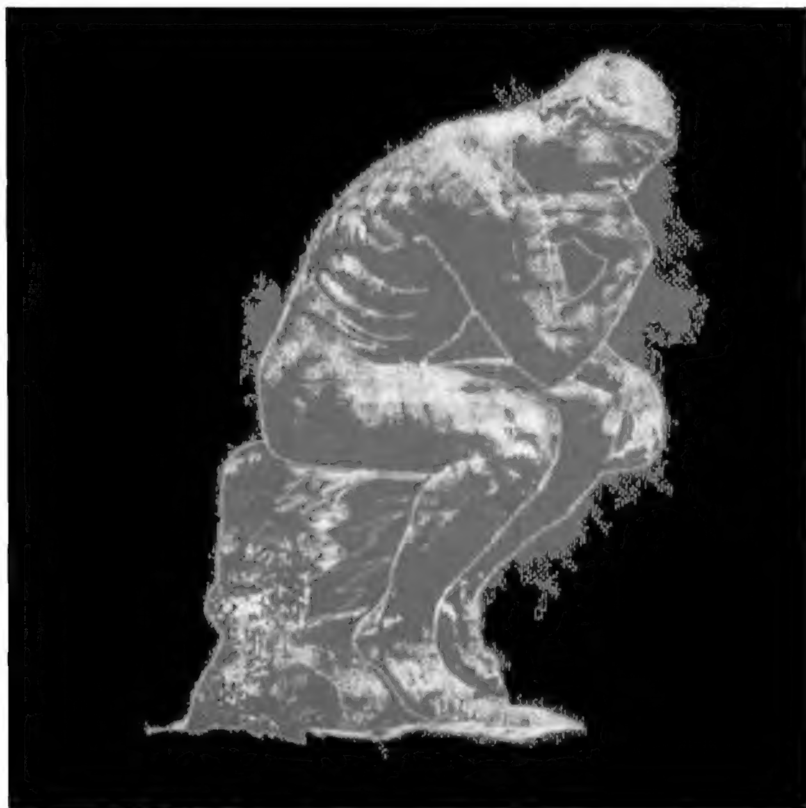
دەقی نامەکەی "گۆلدباخ" بۆ "ئۆیلەر" لە هەمبەر گریمانەکە.

بەرنامەی لاینگلاندس

Langlands program

بەرنـــامەی لاینگلانـــدس، بەرنـــامەیەکە کە ئەو پرســـانەی بە شـــیکار نەکـراوی مـاونەتەوە، هەموویـان لە ژێـر چەترێـک کۆدەکـاتەوە، بەو مەرجەی کە پەیوەنـــدییەک ئەو پرســـانە پـــێکەوە ببەســـتێتەوە لە تیـــۆری ژمارەکـــان و تیـــۆری گـــرووپ. لەگەڵ یەکخســـتنێکی ڕێتێچـــوو بـــۆ زۆربەی بابەتەکـــانی بیرکـــاری؛ ئەوانەی کە مـــاوەیەکی زۆرە بیـــری مرۆڤایەتییـــان بەخۆیـــانەوە ســـەرقاڵکردووە بە شـــێوەیەکی جیـــاکراوە. یەکەم هەوڵ بـــۆ ئەم کـــارە لە لایەن بیرکـــاریزانی کەنـــدی ڕۆبێـــرت "لاینگلانـــدس" لە دەورووبەری ســـاڵی 1960 بـــوو. گریمانەکـــان لەم بەرنـــامەیە شـــێوەی فەرهەنگێـــک وەردەگـــرن کە هاوتـــا و گونجـــاو بێـــت، لەگەڵ پێشـــنیازکردنی ئەوەی: ئەگەر چەنـــد ئەنجامێـــک لە تیـــۆرییەک ڕاســـت بـــوو، ئەوە هاوشـــێوەی ئەنجـــامەکە ڕاســـتە بـــۆ ئەو پرســـیارانەی دەکەونە نـــاو بەرنـــامەکە، ئەمەش لە ســـایەی ســـێبەری ئەنجـــامی ئەو پرسەی کە لە ناو بەرنامەکە یەکلاکراوەتەوە.

ئەم بەرنـــامەیە هەوێنـــی ســـەلماندنی "دوایـــن بیـــردۆزی فیرمـــات"ی دارێشـــت بە کـــاریگەیی ئەنجامەکـــانی بەرنـــامەکەی لاینگلانـــدس. لەگەڵ ئەوەشـــدا، چـــوونە پـــێش بەهـــۆی بەرنـــامەکەی لاینگلاندســـەوە لەمە و هەنـــدێ ئاراســـتەی تـــر، هێشـــتا چەنـــدین کێشـــە هەن هەر بە شـــیکارنەکراوی-یەکلانەکـــراوە مـــاونەتەوە. ســـەرەڕای ئەوەش، بەرنـــامەی لاینگلانـــدس یەکخستنێکی ناوازەی بیرکاری هاوچەرخە.



ژێدەرەکان:

بۆ وەرگێڕان و دۆزینەوەی واتای بەشێکی زۆری زاراوەکان، سوودم لەم چەند فەرهەنگەی خوارەوە وەرگرتووە:

i. فەرهەنگی خاڵ، کوردی-کوردی، شێخ محەمەدی خاڵ، چاپی دووەم، 2015.

ii. فەرهەنگی بیرکاری، ئینگلیزی-عربی-کوردی، نەوزاد عمر محیدین، 2013.

iii. فەرهەنگی فیزیا، ئینگلیزی-عربی-کوردی، نەوزاد عمر محیدین، 2013.

iv. فەرهەنگی ئۆکسفۆرد، ئینگلیزی-کوردی، زانەر محمد، 2011.

v. فەرهەنگی تەکنۆلۆژیای زانیاری، ئینگلیزی-کوردی، زانستپەروەرانی کورد، وەشانی دووەم، 2011.

vi. پێناسە و ڕاڤەی زاراوەکانی کۆمپیوتەر، ئاراس نوری ئەحمەد، 2012.

vii. فەرهەنگی ئاناهیتا، کوردی-کوردی. (http://ferheng.info)

viii. فەرهەنگی بیرکاری، ئینگلیزی-ئینگلیزی، چاپکراوی زانکۆی Oxford، Oxford concise dictionary of mathematics، Oxford university press.

دەربارەی وەرگێڕ و ئامادەکار:

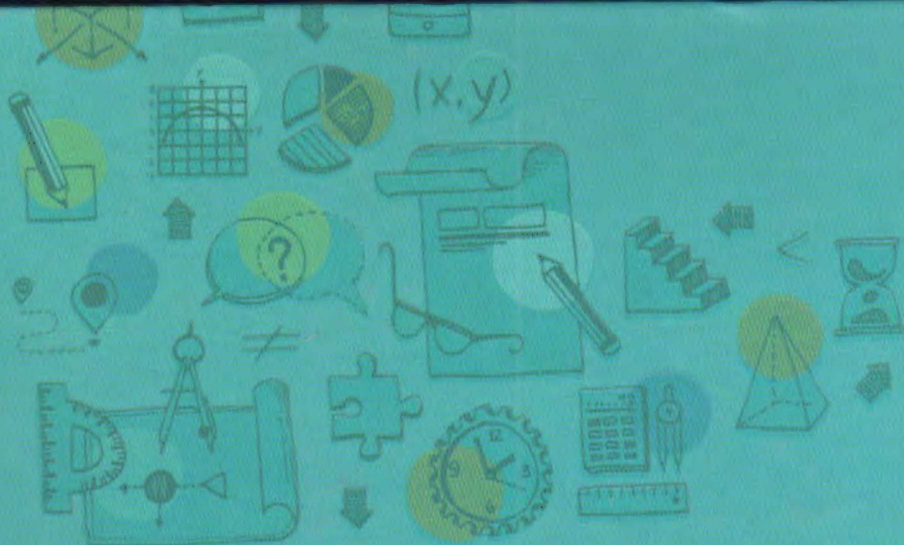
(ئوسـامە تحسـین پیربـاڵ) بەکـالۆریۆس لە پەروەردەی بیرکـاری بە پـلەی یەکەم (ئاسـتی زۆر باشـە)، سـاڵی 2018، زانکـۆی سـەلاحەدین-کۆلێژی پەروەردە.

خـاوەنی بلـۆگی بیرکـاری بـۆ کـورد. نووسـین و وەرگێڕانـی چەنـدەها بابەت سەبارەت بە بیرکاری و پەروەردەی بیرکاری.

دەمەزرێـنەری "یـانەی بیرکـاری" لە زانکـۆی سـەلاحەدین، کـۆلێژی پەروەردە، بەشی بیرکاری، ساڵی 2016 - 2018 .

بەشـداریکردن لە "هەشـتەمین کۆنفراسـنی زانسـتنی" کـۆلێژی پەروەردە، بۆ توێژینەوەکانی قوتابیانی قۆناغی چوارەمی کۆلێژ. (2018)

بەشـداریکردن لە "کۆنفرانسـتی بیرکـاری، بیرکـاری پەتـی و پەروەردەی بیرکاری" زانکۆی تیشک. (2017)



پەرتوکی "بیرکاری لە چەند خولەکێک" یەکێک بوو لەو پەرتوکانەی کە زۆر بە وردی خوێندمەوە و زۆر سەرنجی ڕاکێشام، پەرتوکێکە، کە ئەتوانم بڵێم؛ نزیکەی 70 لە سەدی مەعەریفەی بیرکاری لە خۆگرتووە، وەک نووسەریش خۆی باسی ئەکات. لەگەڵ ئەمەش، پەرتوکەکە جگە لەوەی ئاشنات دەکات بە هەندێ بابەت و چەمکی زۆر گرنگ، کێشە بیرکارییە شیکارنەکراوەکانیشت پێ دەناسێنێت.




07501269689
07511408868


hakem1423@yahoo.com
renwen2009@yahoo.com


سلێمانی - بازاڕی ئاوباریک- نهۆمی یەکەم
بەرامبەر کاسۆمۆڵ - دوکانی ژمارە (٦٦)



٨٠٠٠ هەزار دینار

ISBN: 978-9922-626-07-9

